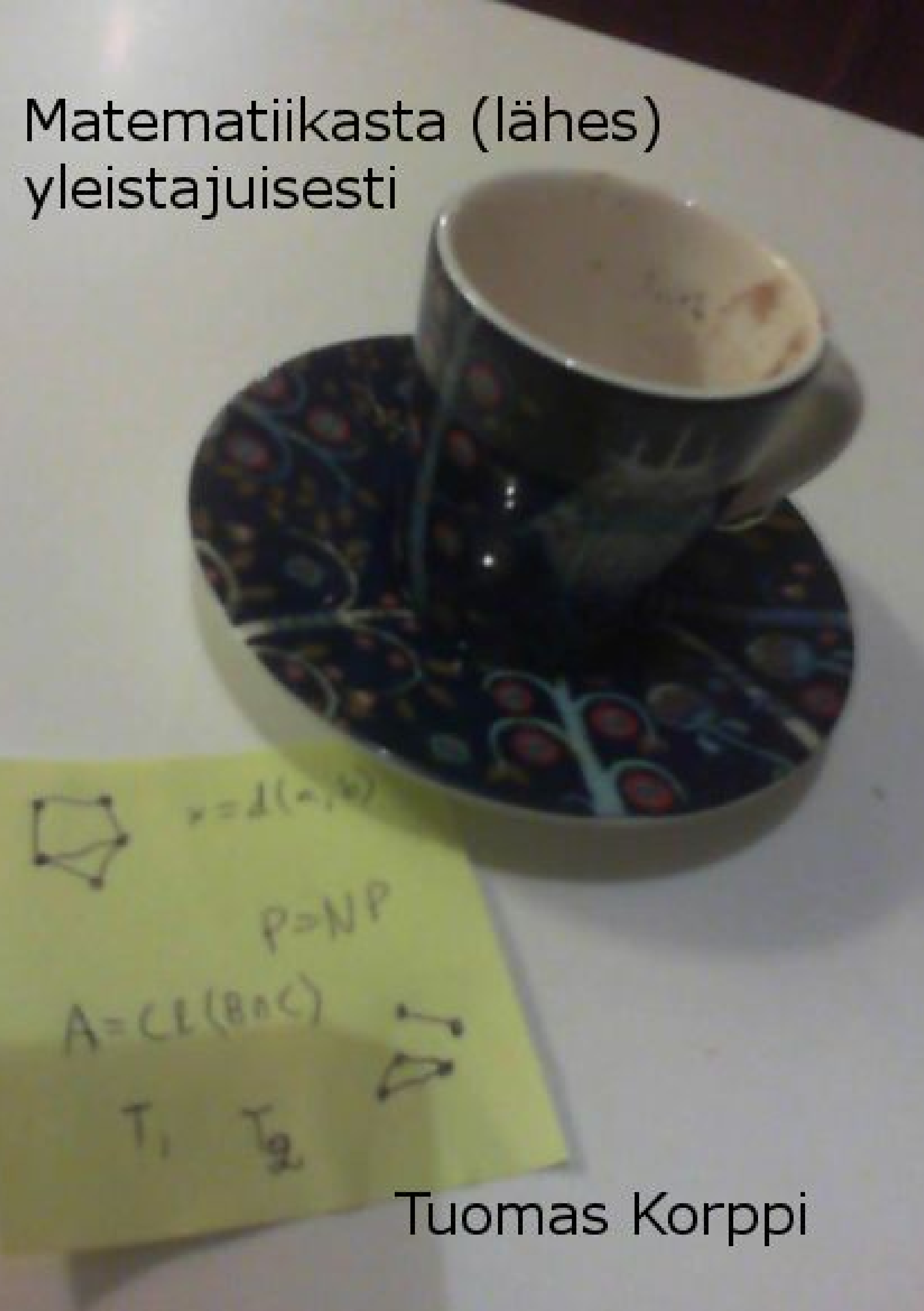
Matematiikasta (lähes) yleistajuisesti



Tuomas Korppi

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tässä on kirjoituksiani matematiikasta. Kirjoitukset on suunnattu yleisölle, joka ei ole matemaatikoita, mutta esitietoina oletetaan hyvin hallittu lukion pitkä matematiikka.

Olen itse suuntautunut sellaisille matematiikan aloille, joissa numeroita esiintyy suhteellisen vähän. Vahvat alani ovat topologia, joka on eräänlaista geometriaa ja logiikka, jossa tutkitaan eräänlaisten keinotekoisten kielten ilmaisuvoimaa. Tämä heijastuu myös tämän kirjoitelman aihevalintoihin, numeroita kirjoituksissani näkyy suhteellisen vähän. Olen aina ollut sitä mieltä, että päätteleminen on hauskempaa kuin laskeminen, enkä tässäkään vihkossa juurikaan käsittele sellaisia matematiikan osa-alueita, joilla joutuu laskemaan.

Vihko alkaa poleemisella tekstillä, jossa esitän oman näkemykseni matematiikasta. Tätä seuraa artikkeleja eri matematiikan osa-alueilta. Artikkelit on aiemmin julkaistu Matematiikkalehti Solmussa.

Luku 2

Väitteitä matematiikan opetuksesta ja vastauksia niihin

Maallikoilla on mitä kummallisimpia näkemyksiä matematiikasta, ja nämä näkemykset heijastuvat siihen, millaisena he näkevät matematiikan kouluopetuksen[1] roolin. Tässä kirjoitelmassa esitän tällaisia näkemyksiä väitemuodossa ja annan oman vastaukseni väitteisiin. Vaikka väitteiden muotoilu on minun tekemäni, kaikilla esitetyillä väitteillä on esikuvansa todellisuudessa.

2.1 Matematiikan luonne

Väite 1 *Matematiikkahan on pelkästään joukko sopimuksia.*

Vastaus: Kaikilla tieteenaloilla on omaa erikoisterminologiaansa, ja termien merkitykset voidaan nähdä sopimuksina. Matematiikka ei ole mikään poikkeus, ja matemaatikkojen ammattikielessä tällaista termin merkityksen määrittelyä kutsutaan *määritelmäksi.*

Määritelmät itsessään eivät ole matematiikassa se asian pihvi, vaan se, että niistä voidaan loogisesti päätellä uusia väittämiä, joita kutsu-

[1] Koululla tarkoitan tässä kirjoitelmassa peruskoulua ja lukiota.

taan *teoreemoiksi*. Päättelyketjut ovat useissa tapauksissa hyvinkin monipolvisia, ja se, että jokin teoreema on määritelmien looginen seuraus, voi olla päättelyketjua tuntemattomalle ihmiselle (jopa matemaatikolle) hyvinkin yllättävää.

Muista tieteistä matematiikka eroaa siten, että muissa tieteissä tulokset eivät ole pelkästään termien merkitysmäärittelyjen loogisia seurauksia, vaan muissa tieteissä tulokset riippuvat sekä termien merkityksistä että ympäröivän todellisuuden luonteesta.

Matematiikan varsinaisesti mielenkiintoisen sisällön voidaankin katsoa muodostuvan lauseista tyyppiä ”Näistä-ja-näistä määritelmistä seuraavat nämä-ja-nämä teoreemat”. Tällaisten lauseiden totuus tai epätotuus ei sitten enää olekaan sopimuksenvarainen asia vaan looginen välttämättömyys.

2.2 Matematiikka suhteessa muihin kouluaineisiin

Väite 2 *Koulun on tarkoitus tarjota yleissivistystä eikä keskittyä insinöörien tuotantoon talouselämän palvelukseen. Näin ollen matematiikkaa ei tule painottaa.*

Vastaus: Matematiikassa on osia, jotka kuuluvat yleissivistykseen. Tällaista on esimerkiksi ala-asteella opittava peruslaskento, joka jokaisen länsimaisen ihmisen kuuluu osata. Kirjainalgebrasta yleissivistykseen kuuluu ainakin sen ymmärtäminen, kuinka kirjainten avulla voidaan esittää yleisiä, kaikkia lukuja koskevia väitteitä. Tämä on yleissivistävää, koska se esittää oppilaille uuden tavan ilmaista asioita.

Yleissivistävää materiaalia löytyy myös nykyisen koulukurssin ulkopuolelta. Tärkeimpänä tällaisena asiana pidän deduktiivisen metodin hallintaa, jossa lähdetään aksioomista, ja niistä käsin todistetaan, eli perustellaan aukottomasti teoreemoja. Tämä on yleissivistävää siksi, että tällaisessa ympäristössä tutustutaan siihen, millaista on tieto, joka voidaan tietää varmasti, ja joka eroaa empiirisissä tieteissä saavutettavasta tiedosta, joka on epävarmaa.

Deduktiivinen metodi, Eukleideen geometriana, on myös kuulunut klassiseen yleissivistykseen.

Myös modernimmassa matematiikassa on osia, joiden hallinta on mielestäni yleissivistävää. Tällaisia ovat ainakin seuraavat:

- $\delta - \varepsilon$ -metodi, jolla jatkuvaa muutosta voidaan käsitellä matemaattisen täsmällisesti.
- Kardinaalilukujen teorian alkeita sen verran, että ymmärretään, että parhaiden matemaattisten teorioiden mukaan äärettömiä joukkoja on eri kokoisia.
- Lebesguen mitan teoria, joka kertoo, kuinka omituisen mallisiin joukkoihin käsitteitä "pituus", "pinta-ala" ja "tilavuus" voidaan mielekkäästi soveltaa.
- Sen ymmärtäminen, mitä Gödelin epätäydellisyyslauseet sanovat. Tämä kertoo matemaattisen metodin rajat. Lisäksi nämä lauseet osoittavat, että totuus transsendenttina ominaisuutena on erotettava todistuvuudesta inhimillisesti saavutettavissa olevana ominaisuutena. Monissa maallikoiden käymissä filosofisissa keskusteluissa olen huomannut, että ihmisillä on mitä kummallisimpia harhaluuloja koskien Gödelin epätäydellisyyslauseita.

Yllä olen esimerkinomaisesti luetellut matematiikan osia, jotka ovat yleissivistäviä. Luetteloa ei ole tarkoitettu kattavaksi; yleissivistävää materiaalia löytyy varmasti lisääkin. Näin ollen kouluopetuksen muuttaminen yleissivistävämmäksi ei tarkoita matematiikan osalta sitä, että sen määrää vähennettäisiin, vaan ennemmin sitä, että painopistettä siirretään matematiikan sisällä insinöörien tarvitsemasta "välinematematiikasta" kohti käsitteellisesti mielenkiintoista matematiikkaa.

Väite 3 *Matematiikka ja kovat luonnontieteet edustavat kovia arvoja. Kouluopetuksen on sitä vastoin painotettava pehmeitä arvoja.*

Vastaus: Ensinnäkin tekisi mieli muistuttaa Humen giljotiinista. Matematiikka ja luonnontieteet tuottavat tietoa siitä, kuinka asiat ovat, eivätkä ne suoranaisesti kerro siitä, kuinka asioiden pitäisi olla. Näin ollen ne ovat neutraaleja arvokeskustelussa.

Kovia arvoja edustaakin nähdäkseni lähinnä rahan ja yleisemmin talouden roolin painottaminen päätöksenteossa, eikä matematiikka sinällään sano juuta eikä jaata koskien sitä, pitäisikö näitä asioita painottaa.

Taloustieteen teorioissa toki sovelletaan matematiikkaa, ja jotta ihminen voisi uskottavasti argumentoida kovia taloudellisia arvoja kannattavia ihmisiä vastaan, hänen täytyy hallita talouden lainalaisuudet, ja näin ollen myös matematiikkaa. Näin matematiikka on, hiukan kiertotietä, hyödyllistä myös ihmiselle, joka haluaa edesauttaa pehmeiden arvojen toteutumista.

Väite 4 *Koulun on opetettava kriittistä ajattelua, ja sitä tukevat parhaiten humanistiset aineet, ei matematiikka.*

Vastaus: Ensinnäkin kouluopetuksessa on sellainen ongelma, että tieteiden metodologiaan ei yleensä päästä, mikä rajoittaa kriittisen ajattelun opettamista ylipäätänsä, koska oppilaat eivät näe, millaisia ovat ne ajattelutavat, joita tiedon keräämisessä käytetään. Myös humanistisissa aineissa ”kriittinen ajattelu” jää koulussa usein mielipiteiden ilmaisemisen tasolle.

Matemaattinen metodi, deduktiivinen päättely, on periaatteessa opetettavissa jo lukiotasolla (katso vastaus Väitteeseen 2). Tämä edesauttaa kriittisen ajattelun valmiuksia, koska oppilaat tutustuvat päättelyketjuihin, jotka ovat tiukasti totuuden säilyttäviä. Tämä auttaa hahmottamaan hyvän ja huonon päättelyn eroa.

On tietysti totta, että kriittinen ajattelu on paljon muutakin kuin deduktiivista päättelyä, mutta väitän, että humanististen tieteiden summittaisella painottamisella matematiikkaan verrattuna tavoitetta ei saavuteta. Eräs mahdollisuus kriittisen ajattelun opettamiseen olisi matemaattisen deduktion opettaminen, ja sen lisäksi väittelytaidon kurssi, jolla keskityttäisiin argumentaatiovirheiden karsimiseen. Argumentaatiovirheet kun ovat yleensä seurausta ajatusvirheistä.

2.3 Matemaattisista ajatusprosesseista

Väite 5 *Koulun tulee opettaa luovuutta, ja koska matematiikka ei ole luovaa, sitä ei tule painottaa.*

Vastaus: Koulumatematiikassa hinkataan hyvin paljon mekaanisia laskutehtäviä, mikä tosiaan ei ole luovaa. Yliopistomatematiikassa tilanne on toinen. Siellä törmätään ongelmiin, jotka toteuttavat molemmat seuraavista ehdoista:

1. Ongelman ratkaisun oikeellisuuden tarkastaminen on mekaaninen toimenpide.

2. Ongelman ratkaisun löytämiseen ei ole mekaanista menetelmää.

Tällaisissa olosuhteissa törmätään aivan omanlaiseensa luovuuden lajiin. Kohdan (2) takia luovuutta tosiaan tarvitaan: Valmiin ratkaisukonseptin mekaaninen soveltaminen ei ole mahdollista. Kohdan (1) takia kenenkään ei ole mahdollista tarjota epäkelpoa ratkaisua ja väittää, että sen hyvyys on mielipidekysymys.

Tällainen luovuus eroaa jonkun verran siitä luovuudesta, jota esimerkiksi kuvataiteilija käyttää, koska esimerkiksi tehtävänannon ”luova tulkitseminen” ei ole sallittua. Toisaalta tällainen luovuus tulee lähelle runoilijan luovuutta silloin kun runoilija kirjoittaa runoa johonkin mittaan: Mitta asettaa reunaehdot runon rytmille ja loppusoinnuille samaan tapaan kuin matematiikan oikeellisuuden säännöt asettavat reunaehdot matemattisen tehtävän ratkaisulle. Nähdäkseni mittaan kirjoittava runoilija tarvitsee vapaaseen mittaan kirjoittavaan verrattuna huomattavasti enemmän luovuutta, koska hänen on löydettävä sanat, jotka *sekä* sopivat mittaan *että* välittävät sen, mitä hän haluaa sanoa.

Uskoisin, että elävässä elämässä tarvitsemme enemmän matemaatikon luovuutta kuin kuvataiteilijan luovuutta, koska todellisuus asettaa selkeitä rajoja ratkaisujen hyvyydelle.

Näin ollen olenkin vahvasti sitä mieltä, että matematiikan kouluopetukseen olisi tuotava mahdollisuuksien mukaan tehtäviä, jotka toteuttavat ehdot (1) ja (2). Eräs tehtävätyyppi, jossa tähän tärmätään ilman, että vaaditaan syvällistä matematiikan teorioiden tuntemusta, ovat tehtävät, joissa etsitään voittostrategioita yksinkertaisiin peleihin.

Väite 6 *Matemaatikot pelkästään tuijottavat kaavoihinsa. Haluamme, että koulussa ihmisille opetetaan laaja-alaisempaa ymmärryskykyä.*

Vastaus: Kuten edellä on tullut ilmi, matematiikka on päättelyä ja ongelmanratkaisua, ja kaavat ovat vain kieli matemaattisten asioiden esittämiseen. Itse asiassa matemaattisessa tekstissä yleensä vaihdellaan luonnollisen kielen ja kaavojen välillä aina sen mukaan, kummalla on esitettävä asia helpompi ilmaista.

Matemaattisen ymmärryskyvyn omaavat ihmiset yleensä myös ymmärtävät, mistä kaavat tulevat, mikä on ainoa tapa hahmottaa jonkun kaavan sovellusalueen rajat tai kysymys kaavan pätevyydestä ylipäätänsä. Kritiikitön kaavan soveltaminen on yleensä merkki matemaattisen ymmärryskyvyn puutteesta, ja eräs matematiikan opettamisen syistä onkin antaa ihmisille ymmärrys, jolla punnita kaavoja tai matematiikkaan pohjaavia väitteitä ylipäätänsä.

2.4 Matematiikan käytännön hyöty

Väite 7 *Koulujen matematiikan opetuksessa on siirryttävä soveltaviin tehtäviin.*

Vastaus: Tässä sana ”soveltava” on aika monitulkintainen. Ensinnäkin sillä voidaan tarkoittaa sovelluksia käytännön elämään. Toisekseen sillä voidaan tarkoittaa esitetyn matemaattisen teorian soveltamista uusiin matemaattisiin ongelmiin, joilla ei välttämättä ole yhteyttä käytännön elämään.

Mielestäni käytäntöön soveltaminen ei saa olla oppisisältöjen valinnassa itseisarvo. Tärkeää on se, että oppilaat oppivat matemaattista teorianmuodostusta sekä luovaa matemaattista ongelmanratkaisukykyä, eli yhteenvetona matemaattista ajattelua. Käytäntöön soveltavia ongelmia kannattaa esittää vain sikäli, kun se palvelee tätä tarkoitusta. Erityisesti sellaisia soveltavia tehtäviä on vältettävä, joissa tehdään vain mekaaninen, suoraviivainen sovellutus esitetystä teoriasta.

Soveltaminen uusiin matemaattisiin ongelmiin on selkeämmin kannatettavaa. Tällaiset tehtävät ovat hyvin usein niitä, joissa sovellus ei ole suoraviivainen, vaan vaatii kekseliäisyyttä, eli yleensä toteuttaa Väitteen 5 vastauksessa mainitut pykälät (1) ja (2).

Väite 8 *Matematiikan opettaminen koulussa on turhaa. En ole eläessäni tarvinnut derivaattaa mihinkään.*

Vastaus: Ensinnäkin on kohtuutonta yleistää derivaatan tarpeettomuus koko matematiikan tarpeettomuudeksi. Esimerkiksi ala-asteella opetettavia peruslaskutoimituksia jokainen tarvitsee arkipäiväisessä elämässään.

Lisäksi differentiaali- ja integraalilaskenta, johon derivaattakin kuuluu, on välttämätöntä luonnontieteisiin ja tekniikkaan jatko-opinnoissa suuntautuville oppilaille, ja koulun on annettava valmiudet myös heille. Tässä merkittävä on lukion matematiikan jako pitkään ja lyhyeen matematiikkaan. Ne jotka aikovat jatkossa suuntautua luonnontieteisiin ja tekniikkaan, voivat lukiossa valita pitkän matematiikan.

Kuitenkin suuri osa koulussa opetettavasta asiasta muissakin aineissa on sellaista, jota ei jatkossa konkreettisesti tarvita, mutta jonka hallitsemisen katsotaan olevan arvokasta yleissivistystä. Siitä, mikä osa matematiikasta on mielestäni tällaista, olen kirjoittanut Väitteen 2 vastauksessa.

On totta, että en katso derivaatan kuuluvan matemaattiseen perusyleissivistykseen. Sitä vastoin differentiaali- ja integraalilaskentaa tarvitaan hyvinkin yksinkertaisen fysiikan ymmärtämisessä. Esimerkiksi nopeus on kuljetun matkan derivaatta ajan suhteen. Mielestäni tietty määrä fysiikkaa, ympäröivän todellisuuden perimmäisten lainalaisuuksien tutkimisena, kuuluu yleissivistykseen jos mikä. Näin derivaattakin kuuluu yleissivistykseen, ei osana matemaattista yleissivistystä vaan osana fysikaalista yleissivistystä.

2.5 Liite: Aksioomien ja määritelmien suhteesta

Kysymyksen 1 vastauksessa puhun siitä, että teoreemat seuraavat määritelmistä. Koska joillekin koelukijoilleni heräsi kysymys, eikö aksioomia tarvita myös, selvennän tässä liitteessä kantaani.

Tässä kannattaa huomata aksiooman roolin muuttuminen antiikista nykyaikaan. Aiemmin aksioomia pidettiin itsestäänselvyyksinä, jotka eivät tarvinneet perustelua, ja joita siksi voitiin pitää päättelyn lähtökohtana.

Nykyisin aksioomiin ei liity tuollaista itsestäänselvyyden vaatimusta, ja ne esiintyvät osana määritelmiä. Esimerkiksi topologinen avaruus määritellään miksi tahansa systeemiksi, joka toteuttaa topologisen avaruuden aksioomat. Ryhmät määritellään samalla tavoin aksiomaattisesti. Itse yleistäisin vielä tästä, ja pitäisin esimerkiksi 2. kertaluvun Peanon aksioomia luonnollisten lukujen systeemin määritelmänä: Määrittelen luonnollisten lukujen systeemin siksi isomorfiaa vaille yksikäsitteiseksi systeemiksi, joka toteuttaa 2. kertaluvun Peanon aksioomat. Reaaliluvut määrittelen vastaavasti.

Tällä lähestymistavalla tarvitsemme matematiikan lähtökohdaksi kolme asiaa:

1. Määritelmät
2. Päättelysäännöt
3. Matemaattisen konstruoimisen säännöt

Kohdan 1 vastauksessa tarkoitukseni oli käyttää sanaa "looginen" löyhässä mielessä niin, että se kattaa pykälät (2) ja (3). Jos ollaan tarkkoja, ylläoleva lista tarkentuu muotoon

1. Määritelmät
2. 1. kertaluvun predikaattilogiikka
3. ZFC-joukko-opin aksioomat

Näin ZFC-joukko-opin aksioomat (tai, jos niin halutaan, joku niiden vahvennus, jossa voidaan puhua myös aidoista luokista) ovat ainoa aksioomien muoto, jotka ovat aksioomia vanhassa, antiikinaikaisessa mielessä. Puolustan kuitenkin niiden sisällyttämistä "logiikkaan" vastauksessani sillä, että suuri osa matemaatikoista ei edes tunne kyseisiä aksioomia perusteellisesti, vaan suorittavat matemaattiset konstruktiot itsestäänselvänä pitämällään tavalla, joka yhtyy ZFC:ssä sallittuihin operaatioihin.

Luku 3

Suklaa, kauneus ja matematiikka

Ratkaisun löytäminen matemaattiseen probleemaan ei ole useinkaan helppoa. Tässä tekstissä kuvailen ajatusprosessin, jonka jouduin käymään läpi saadakseni ratkaistua Tommi Sottisen minulle esittämän kysymyksen.

Oletetaan, että meillä on $k \times l = n$ palan suklaalevy, joka pitäisi pilkkoa yhden palan kokoisiksi osiksi. Käytämme seuraavaa menetelmää:

Katkaisemme levyn palojen välistä (suoraviivaista) jakoviivaa pitkin, ja saamme kaksi osaa. Sen jälkeen valitsemme jonkun osan, ja katkaisemme sen palojen välistä jakoviivaa pitkin. Toistamme tätä osan valitsemista ja sen halkaisemista, kunnes suklaa on täysin pilkottu.

Ylläesitetty pilkkomissysteemi jättää kuitenkin pilkkojalle valinnanvaraa. Hän voi esimerkiksi aloittaa halkaisemalla levyn joko pitkittäis- tai poikittaissuunnassa. Hän voi myös halkaista levyn keskeltä tai katkaista pelkästään yhden rivin levyn päästä. Pilkkoja on laiska, ja niinpä hän haluaisi saada levyn yhden palan kokoisiin osiin mahdollisimman vähällä työllä. Kuinkahan hänen kannattaisi käyttää pilkkomissysteemin jättämä valinnanvara?

> **Kysymys:** Kuinka pilkkomiskohdat kannattaisi valita, että suklaalevy saataisiin yhden palan kokoisiksi osiksi mahdollisimman vähillä pilkkomisilla? Kuinka monta pilkkomista

tällöin tarvitaan?

Tietokoneohjelmoinnin matemaattisessa tarkastelussa törmätään usein ylläesitetyn kysymyksen kaltaisiin probleemoihin. Tietokone pitäisi saada ratkaisemaan haluttu ongelma mahdollisimman vähillä laskenta-askeleilla, ja usein käy niin, että ensiksi mieleen tuleva tapa ei ole nopein mahdollinen.

Tarkastellaan esimerkiksi listaa, jossa on n lukua suuruusjärjestyksessä, ja tietokone pitäisi ohjelmoida vastaamaan kysymykseen ”onko luku k listassa?” Voimme esimerkiksi kirjoittaa ohjelman, joka käy listan läpi alusta loppuun, ja jokaisen listan alkion kohdalla tarkastaa, onko kyseinen listan alkio k. Ohjelma toimii, mutta se joutuu tekemään pahimmillaan n askelta, yhden jokaista listan alkiota kohti.

Parempi tapa ratkaista ongelma onkin seuraava: Tarkastellaan ensin listan keskimmäistä alkiota[1]. Jos se on k, on ongelma ratkaistu. Jos se on suurempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään listan alkupuolta. Jos se on pienempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään listan loppupuolta. Seuraavaksi otetaan edellä valittu listan puolikas, ja sen keskimmäinen alkio. Jos se on k, on ongelma ratkaistu. Jos se on suurempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään valitun listanpuolikkaan alkupuolta. Jos se on pienempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään valitun listanpuolikkaan loppupuolta. Toistetaan sama valitulle listan neljäsosalle, sitten kahdeksasosalle, ja niin edelleen, kunnes k on löytynyt, tai valittu listan osa on huvennut tyhjiin (jolloin k ei ole listassa). Tällä menetelmällä vaaditaan enimmillään noin $\log_2 n$ laskenta-askelta: Jos listan pituus on esimerkiksi 65536 alkiota, askeleita on enimmillään vain 16, eli systeemi on huomattavan nopea.

Suklaalevyä voidaan puolitella hiukan samaan tapaan kuin taulukkoa yllä, joten matemaattisesti koulittu henkilö muodostaa lähes alitajuisesti seuraavan konjektuurin:

[1] Jos listassa on pariton määrä alkioita, on listassa yksikäsitteinen keskimmäinen alkio. Mikäli listassa on parillinen määrä alkioita, valitaan jompi kumpi kahdesta keskimmäisestä alkiosta. Menetelmän toimivuuden kannalta on yhdentekevää, kumpi valitaan.

> Hyvällä taktiikalla vaadittu pilkkomisten määrä on jotakuinkin $\log_2 n$.

Havaitaan myös, että saman kokoisia, mutta eri muotoisia levyjä voidaan pilkkoa eri tavalla. 4×1-levystä voidaan ottaa yksi pala erilleen, mutta 2×2-levystä täytyy lohkaista kaksi palaa kerralla. Niinpä muodostamme seuraavan konjektuurin:

> Suklaalevyn muoto eli ”geometria” vaikuttaa vaadittujen lohkomisten määrään.

Tämä on täysin normaali menetelmä probleemoja ratkaistessa: Ensin arvataan väittämiä, ja sitten yritetään todistaa ne. Tässä tapauksessa sankarimme ei kuitenkaan keksi, kuinka näitä konjektuureja voisi lähteä todistamaan.

Kun lennokkaat ideat eivät toimi, on aika palata maan tasalle. Otamme siis pieniä levyjä, ja tapaus tapaukselta katsomme läpi, kuinka monta pilkkomista ne vaativat. Tarkoituksena on nähdä, josko levyn koon/muodon ja vaaditun pilkkomisten määrän välille löytyisi jokin yhteys.

- 1×1-levy? Se on jo valmiiksi yhden palan kokoinen. Siis 0 pilkkomista.
- 2×1-levy? Sen voi pilkkoa vain yhdellä tavalla. Siis 1 pilkkominen.
- 2×2-levy? Ainoa tapa on pilkkoa ensin kahdeksi 2×1-levyksi, jotka pilkotaan sitten yhden palan kokoisiksi. Siis 3 pilkkomista.
- 4×1-levy? Nyt voidaan pilkkoa kahdella tavalla. Ensimmäinen vaihtoehto on pilkkoa ensin kahdeksi 2×1-levyksi, jolloin tilanne on sama kuin edellisessä tapauksessa. Toinen vaihtoehto on irroittaa ensin yksi pala, sitten yksi pala lisää, ja lopuksi halkaista 2×1-levy kahtia. Siis 3 pilkkomista kummallakin tavalla.
- 3×2-levy? Edelleen kaksi tapaa pilkkoa. Joko ensin kahdeksi 3×1-levyksi, jotka paloiksi, tai ensin kolmeksi 2×1-levyksi, jotka paloiksi. Molemmilla tavoilla 5 pilkkomista.

Kaikissa yllämainituissa tilanteissa kävi niin, että n palan levyn paloittelu vaati $n-1$ pilkkomista riippumatta levyn geometriasta tai valitusta pilkkomistaktiikasta. Tässä vaiheessa heitämmekin edelliset konjektuurit romukoppaan, ja yritämme todistaa uutta konjektuuria:

> Kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee, että n palan levyn paloittelu vaatii $n-1$ pilkkomista riippumatta levyn geometriasta tai valitusta pilkkomistaktiikasta.

Todistettaessa väittämiä kaikille luonnollisille luvuille kannattaa käyttää induktiota:

- *$n = 1$:* 1×1-levyn paloitteluun tarvitaan 0 pilkkomista. Siis väite pätee tässä tapauksessa.

- *$n > 1$ mielivaltainen, väite pätee kaikille luvuille m, jotka ovat pienempiä kuin n:* n palan kokoinen levy pilkotaan ensin kahteen osaan (1 pilkkominen!), kooltaan m, m'. Sitten m ja m' palan kokoiset osat pilkotaan yhden palan kokoisiksi. Tämä vaatii $m-1$ ja $m'-1$ pilkkomista induktio-oletuksen nojalla (ja on riippumaton pilkkomistaktiikasta). Yhteensä siis tehdään $(m-1)+(m'-1)+1 = m+m'-1 = n-1$ pilkkomista. Induktio valmis.

Nyt olemme todistaneet konjektuurimme. Induktiotodistuksissa on yleensä yksi ikävä piirre. Ne kertovat meille, *että* väite pätee, mutta ne eivät kerro meille, *miksi* se pätee. Löytyisiköhän konjektuurillemme toinen todistus, joka auttaisi meitä hahmottamaan tilanteen paremmin?

n palan kokoisen levyn paloitteleminen vaatii $n-1$ pilkkomista. Olisikohan prosessin vaiheilla jokin sellainen ominaisuus, joka kasvaa pilkkomisen myötä? Siis niin, että alussa tuo ominaisuus olisi yksi, yhden pilkkomisen jälkeen kaksi, kahden pilkkomisen jälkeen kolme ja niin edelleen, ja kokonaan paloitellulla levyllä n?

Tässä vaiheessa ratkaisija lyö otsaansa. Tällainen ominaisuus on tietysti olemassa, nimittäin suklaapalasten määrä!

Niinpä saamme konjektuurillemme seuraavan todistuksen:

> Alussa suklaa on yhdessä klöntissä, ja haluttua lopputilaa luonnehtii se, että suklaa on n osassa. Jokainen pilkkominen kasvattaa osien määrää yhdellä (riippumatta valitusta pilkkomistaktiikasta), joten n osaan pääseminen vaatii $n-1$ pilkkomista.

Matematiikassa on kauneutta. Matemaattinen kauneus ei kuitenkaan synny kauniista käsialasta tai sulavasti piirretyistä summamerkeistä, vaan se on ennemmin samaa lajia kuin hyvän vitsin aiheuttama esteettinen mielihyvä: Tilanne ratkeaa, kun se nähdään uudessa, yllättävässä valossa.

Epilogi: Tässä tapauksessa osoittautui, että vaadittu pilkkomisten määrä ei ollutkaan suklaalevyn koon logaritmi, vaikka aluksi niin yritinkin osoittaa. Pilkkomisongelman kysymyksenasettelua voidaan kuitenkin muuttaa niin, että ”pilkkomisten määrä on jotakuinkin suklaalevyn koon logaritmi” on oikea vastaus. Keksiikö lukija, millaisia operaatioita suklaalevyn pilkkojalle pitäisi sallia, että hän saisi suklaan pilkottua yhden palan kokoisiin osiin ajassa, joka on jotakuinkin logaritmi levyn koosta? Millaisilla levyillä pilkkomisten määrä on tarkalleen $\log_2 n$?

Luku 4

Mitä ei voida laskea?

Matemaatikkoja kuulee usein syytettävän siitä, että he olettavat, että mitä tahansa voidaan laskea. Perusteluna sille, että kaikkea ei voida laskea, tarjotaan usein rakkauden määrää tai jotain vastaavaa, joka on niin epämääräistä, että matemaattiset metodit eivät pure siihen.

Todellisuudessa matemaatikot eivät oleta, että mitä tahansa voidaan laskea. He nimittäin tietävät, että *matematiikan sisältä* löytyy asioita, jotka ovat eksaktisti määriteltyjä, mutta niin monimutkaisia, että mikään laskentamenetelmä ei tepsi niihin. Tässä kirjoitelmassa tutustumme pariin tällaiseen kysymykseen.

Korostan vielä, että esitämme tässä kirjoitelmassa kysymyksiä, joista voidaan todistaa, että niiden vastauksia ei edes periaatteessa voida laskea. Tässä siis laskemattomuus ei johdu siitä, että laskentamenetelmiä ei ole vielä keksitty.

4.1 Mitä tarkoitamme laskemisella?

Tarkoitamme laskennalla prosessia, jonka lähtökohta on *syöte*, jokin (jossain ennaltamäärätyssä äärellisessä aakkostossa annettu) äärellinen merkkijono, ja joka päättyy *tulokseen*, joka on samoin äärellinen merkkijono. Laskenta voi koostua useista välivaiheista, mutta oletamme, että laskennalla on jotkin säännöt, jotka määräävät yksikäsitteisesti kussakin kohdassa, kuinka laskentaa jatketaan. Tämä siis tarkoittaa, että säännöt eivät missään kohdassa anna laskijalle valinnanvaraa jatkon suhteen.

Laskettaessa esimerkiksi kynällä ja paperilla käytettävissä oleva aika ja paperin määrä määräävät, kuinka pitkä laskenta voi olla. Teoreettisessa laskennan käsitteessämme emme tee tällaista rajoitetta, vaan laskenta saa olla vaikka kuinka pitkä, kunhan se on äärellinen. Samoin syöte ja tulos saavat olla kuinka pitkiä tahansa, kunhan ne ovat äärellisiä.

Edellä puhuimme kynällä ja paperilla laskemisesta, mutta yleisemmin laskemme tietokoneella. Tämän johdosta kutsummekin niitä sääntöjä, joilla laskenta etenee, *tietokoneohjelmaksi*. Tässä siis hyväksymme tietokoneohjelmaksi minkä tahansa tavallisen tietokoneohjelman, joka saa aluksi yhden syötteen[1], prosessoi sitä ja palauttaa lopuksi laskennan tuloksen. Ainoa ero tavallisiin tietokoneohjelmiin on se, että oletamme tietokoneessa olevan muistia rajattomasti, eli niin paljon kuin on tarpeen. Laskenta voi myös kestää niin pitkään kuin on tarpeen, vaikka tarvittava aikamäärä olisikin epärealistisen pitkä.

Lukijalle kenties heräsi kysymys, että millä ohjelmointikielellä oletamme ohjelmamme olevan kirjoitettu. Tässä vastaus on: Sillä ei ole merkitystä. Käytännössä kaikki käytössä olevat ohjelmointikielet ovat yhtä vahvoja, eli niillä voidaan toteuttaa samat laskennat. Kun siis puhumme tietokoneohjelmasta, lukija voi vapaasti ajatella sen olevan kirjoitettu hänelle tutuimmalla kielellään, esimerkiksi C:llä, C++:lla tai Javalla. Myös kynällä ja paperilla (kunhan sitä on rajattomasti) voidaan teoriassa toteuttaa täsmälleen samat laskennat kuin ohjelmointikielillä - joskin se on käytännössä huomattavasti työläämpää.

Teemme vielä yhden lievennyksen edelläesitettyyn laskennan käsitteeseen. Sallimme tietokoneohjelmiksi myös sellaiset tietokoneohjelmat, jotka eivät kaikilla syötteillä palauta tulosta, vaan jotka voivat joillan syötteillä "jäädä jumiin", eli joillain syötteillä laskenta jatkuu ikuisesti eikä tulosta anneta[2][3]. Jos ohjelma antaa tuloksen jollain

[1]Tässä siis syöte on yksi merkkijono. Yhteen merkkijonoon voi koodata vaikka kuinka paljon tietoa, esimerkiksi useita lukuja vaikkapa puolipisteellä erotettuna

[2] Jokainen ohjelmointia harrastanut lukija lienee tehnyt vähintään kerran elämässään sellaisen ohjelmointivirheen, jonka johdosta ohjelma on jäänyt ikuiseen silmukkaan.

[3]Tällainen ikuisesti jatkuva laskenta voi vaatia laskennan edetessä yhä enemmän

syötteellä x, sanomme, että ohjelma *pysähtyy* syötteellä x.

4.2 Pysähtymisongelma

Valitaan aluksi ohjelmointikieli. Oletamme, että kaikki tässä luvussa mainitut tietokoneohjelmat on kirjoitettu tällä kielellä. Tutkitaan seuraavaa kysymystä:

> On annettu tietokoneohjelma T ja syöte x. Pysähtyykö ohjelma T syötteellä x?

Meitä kiinnostaa se, voidaanko muodostaa tietokoneohjelma T_0, joka vastaa tähän kysymykseen kaikken parien T, x osalta. Tällainen ohjelma siis saisi syötteenään parin T, x, ja palauttaisi merkkijonon "Kyllä", jos T pysähtyy syötteellä x ja merkkijonon "Ei", jos T ei pysähdy syötteellä x tai T ei ole kelvollinen (valitulla ohjelmointikielellä kirjoitettu) tietokoneohjelma.

Osoittautuu, että tällaista tietokoneohjelmaa T_0 ei voida muodostaa. Seuraavaksi todistamme kyseiseen väitteen. Käytämme pohjana Wikipediasta [2] löytyvää todistusta. (Voit skipata todistuksen, jos sen lukeminen tuntuu liian raskaalta.)

> Tehdään vastaoletus: Tällainen tietokoneohjelma T_0 on olemassa. Muodostetaan T_0:aa muokkaamalla uusi tietokoneohjelma T_1, joka saa syötteenään merkkijonon s ja toimii seuraavasti:
>
> - Jos T_0 palauttaa syöteparilla s, s vastauksen "Ei", T_1 palauttaa syötteellä s tuloksena merkkijonon "ok".
> - Jos T_0 palauttaa syöteparilla s, s vastauksen "Kyllä", T_1 jää syötteellä s laskemaan ikuisesti.
>
> Nyt kysymys kuuluu: Kuinka T_1 toimii, jos sille annetaan itsensä (eli T_1) syötteeksi?

ja enemmän muistia. Oletamme, että tällaisella laskennalla on käytössään rajaton määrä muistia, niin, ettei se lopu.

- Jos T_1 palauttaa syötteellä T_1 merkkijonon "ok", T_0 palauttaa parilla T_1, T_1 vastauksen "Ei", eli T_1 jää jumiin syötteellä T_1. Kuitenkin oletimme, että T_1 pysähtyy syötteellä T_1. Ristiriita.
- Jos taas T_1 jää jumiin syötteellä T_1, ohjelma T_0 palauttaa syöteparilla T_1, T_1 vastauksen "Kyllä", eli T_1 pysähtyy syötteellä T_1. Kuitenkin oletimme, että T_1 jää jumiin syötteellä T_1. Ristiriita.

Siis kaikki mahdolliset vaihtoehdot johtavat ristiriitaan, eli vastaoletuksemme on väärä, ja tietokoneohjelmaa T_0 ei voida muodostaa.

Olemme siis nyt löytäneet ensimmäisen eksaktisti määritellyn kysymyksen, jonka vastausta ei voida (kaikissa tilanteissa) laskea: Pysähtyykö annettu tietokoneohjelma annetulla syötteellä?

Voidaan tosin muodostaa sellainen tietokoneohjelma T_0, joka saa syötteenään tietokoneohjelman T ja merkkijonon s, ja joka simuloi T:n laskemista syötteellä s. Kuitenkin, jos laskenta kestää kauan, ei missään vaiheessa laskentaa välttämättä ole mahdollista sanoa, että olemme laskeneet niin kauan, että ohjelma ei varmasti tule pysähtymään.

4.3 Luettelevat tietokoneohjelmat

Aiemmin tutkimme tietokoneohjelmia, jotka yleensä pysähtyivät. Seuraavaksi määrittelemme käsitteen *luetteleva tietokoneohjelma*, joka ei saa syötettä, vaan alkaa laskennan tyhjästä, eikä välttämättä pysähdy. Luetteleva tietokoneohjelma antaa kuitenkin laskennan edetessä tulosteita. Koska laskenta voi jatkua äärettömästi, se voi laskennan kuluessa antaa yhteensä äärettömän määrän tulosteita.

Laskennan edetessä luetteleva tietokoneohjelma voi käyttää yhä enemmän ja enemmän muistia, ja oletamme, että luettelevalla tietokoneohjelmalla on käytössään rajattomasti muistia, niin, että ohjelman suoritus ei tyssää muistin loppumiseen[4].

[4]Lukija voi puolileikillisesti ajatella äärellisellä muistilla varustetun luettelevaa

Ne lukijat, jotka eivät tunne oloaan kotoisaksi tietokoneiden parissa, voivat yhä ajatella kynällä ja paperilla suoritettavaa laskentaa, joka jatkuu ja jatkuu, ja laskennan edetessä määrättyjä välituloksia kutsutaan tulosteiksi.

4.4 Totuus lukuteoriassa

Olkoon $(n, n+2)$ pari luonnollisia lukuja. Sanomme, että n ja $n+2$ ovat alkulukukaksoset, jos sekä n että $n+2$ ovat alkulukuja. On avoin ongelma, onko alkulukukaksosia äärellinen vai ääretön määrä. Jos kävisimme läpi kaikki luonnolliset luvut n ja testaisimme jokaisen kohdalla, ovatko n ja $n+2$ alkulukukaksosia, joutuisimme käymään läpi äärettömän monta lukua n, joten tällainen läpikäynti ei ole laskenta tarkoittamassamme mielessä[5]. Tällaisia väitteen "Alkulukukaksosia on ääretön määrä" kaltaisia, äärettömästä määrästä luonnollisia lukuja puhuvia lauseita on muitakin, ja herää kysymys, olisiko mahdollista muodostaa jokin ääretöntä läpikäyntiä ovelampi laskentamenetelmä, jolla ratkaista kaikkien tällaisten lauseiden totuus. Esittelemme tässä luvussa tuloksen, joka sanoo, että tämä ei ole mahdollista.

Tulos, jonka aiomme esitellä, puhuu luonnollisia lukuja koskevista lauseista. Koska tässä meillä lauseet ovat *matematiikan tutkimuksen kohde*, eivät *matematiikan tutkimuksen väline*, tarvitsemme eksaktin määritelmän niille lauseille, josta tuloksemme puhuu.

Jatkon kannalta olennaista on ymmärtää, että tarkoitamme lukuteorian lauseilla lauseita, jotka puhuvat luonnollisista luvuista, ja joilla on tietty, tarkasti määrätty muoto. Muoto on sellainen, että voidaan laskea, onko jokin merkkijono tätä muotoa oleva lause. Lisäksi kyseistä muotoa olevia lauseita on ääretön määrä. Tässä on huomattava, että muoto on sellainen, että kyseistä muotoa oleva lause voi olla joko to-

tietokoneohjelmaa suorittavan tietokoneen, joka osaa ilmoittaa muistin loppumisesta ja koneen vieressä istuvan juoksupojan, joka käy aina tarpeen vaatiessa ostamassa lisää muistia ja asentaa sen koneeseen laskennan jatkamiseksi.

[5]Useissa tapauksissa tällaisten kaikista luonnollisista luvuista puhuvien lauseiden totuus voidaan ratkaista äärellisellä todistuksella, ja useimmat uskonevatkin, että alkulukukaksoskysymys saadaan ennemmin tai myöhemmin ratkaistua tällä tavoin.

si tai epätosi; muoto määrää vain sen, että kyseessä on mielekäs lause, jolla on totuusarvo.

Annamme hiukan tarkemman luonnehdinnan (joskaan emme tarkkaa määritelmää) sisennettynä. Sen voi halutessa sivuuttaa. Tarkkakin määritelmä on mahdollista antaa, mutta emme halua rasittaa lukijaa sen yksityiskohtien läpikäynnillä.

> Lukuteorian lauseella tarkoitamme ”mielekästä”, äärellistä lausetta, joka saadaan muodostettua käyttäen merkkejä $(,), 0, 1, +, \times, =, \wedge(\text{ja}), \neg(\text{ei}), \forall(\text{kaikilla})$, sekä rajatonta määrää muuttujasymboleja $x_0, x_1, \ldots$. Muuttujien ajatellaan saavan arvoikseen luonnollisia lukuja.
>
> Esimerkkejä lukuteorian lauseista ovat
>
> $$1 + 1 + 1 = 1 + 1,$$
>
> joka on hyvinmuodostettu (joskin epätosi) lause, joka väittää, että kaksi on yhtäsuuri kuin kolme,
>
> $$\forall x_0(x_0 = x_0 + 0),$$
>
> joka väittää, että, jos mihin tahansa luonnolliseen lukuun lisätään nolla, saadan alkuperäinen luku,
>
> $$\forall x_0 \neg(x_0 = x_0 + 1),$$
>
> joka väittää, että mikään luonnollinen luku ei ole sellainen, että kun siihen lisätään yksi, saadaan alkuperäinen luku,
>
> $$(0 = 0) \wedge (1 = 1),$$
>
> joka väittää, että sekä nolla että yksi ovat yhtäsuuria itsensä kanssa,
>
> $$\forall x_0 \neg(x_0 \times 0 = 0),$$
>
> joka on epätosi lause, joka väittää, että mikään luonnollinen luku kerrottuna nollalla ei ole nolla sekä
>
> $$\forall x_0 \neg \forall x_1 \neg(x_1 = x_0 + 1),$$

joka väittää, että jokaiselle luonnolliselle luvulle x_0 on olemassa toinen luonnollinen luku x_1 siten, että $x_1 = x_0 + 1$. (Tässä kannattaa huomata, että "Ei ole niin, että millään x ei päde..." tarkoittaa samaa kuin "On olemassa x, jolle pätee...".)

Myös väite, että alkulukukaksosia on ääretön määrä, on mahdollista kirjoittaa lukuteorian lauseena, joskin lauseesta tulisi melko pitkä.

Lukuteorian lauseen käsitteeseemme sisältyy myös se, että jokaiseen x_i:n esiintymään vaikuttaa kvanttori $\forall x_i$, eli

$$x_2 = x_2 + 0$$

ei ole lukuteorian lause tarkoittamassamme mielessä.

Nyt voidaan todistaa seuraavaa teoreemat

Teoreema 1 *Ei voida muodostaa luettelevaa tietokoneohjelmaa, joka luettelee kaikki todet lukuteorian lauseet ja vain ne.*

Teoreema 2 *Ei voida muodostaa tietokoneohjelmaa, joka saadessaan toden lukuteorian lauseen syötteeksi antaa tuloksen "kyllä" ja saadessan epätoden lukuteorian lauseen syötteeksi antaa tuloksen "ei".*

Todistukset ovat vaikeita, ja ne löytyvät teoksesta Väänänen [1]. (Tulosten saamiseksi tarvitsemme Määritelmän 13.1, Lauseen 12.8 ja Lauseen 12.3.)

Olemme nyt löytäneet toisen hyvinmuotoillun ongelman, jonka vastausta ei voida (kaikissa tapauksissa) laskea, nimittäin matemaattisten väitteiden totuuden. Sanon edellä "matemaattisten väitteiden", mutta itse asiassa olemme todenneet, että laskemattomuus koskee jo hyvin rajallista muotoa olevia matemaattisia väitteitä.

4.5 Seuraus matematiikan harjoittamiselle

Oletetaan, että olemme saaneet matemaattisen todistuksen käsitteen niin hyvin määritellyksi, että voidaan laskea, onko annettu merkkijono todistus. Ts. voidaan muodostaa tietokoneohjelma T_0, joka saa syötteenään parin P, R, ja palauttaa merkkijonon "Ok", jos merkkijono P on lauseen R todistus ja merkkijonon "Ei-Ok", jos näin ei ole. Tämä oletus on realistinen, koska näin voidaan tehdä[6]. Käytännössä vain todistusten saaminen tällaisen eksaktiin muotoon on äärimmäisen työlästä, joten matemaatikot eivät koskaan esitä todistuksia tässä muodossa.

Nyt voidaan muodostaa luetteleva tietokoneohjelma T_1, joka toimii seuraavasti: Se käy läpi kaikki parit P, R, ja aina kohdatessaan parin P, R, missä P on R:n hyväksyttävä todistus, se tulostaa R:n[7]. Ohjelma voidaan tehdä mm. niin, että ensin käydään läpi kaikki kahden merkin mittaiset parit P, R, sitten kaikki kolmen merkin mittaiset parit P, R, sitten kaikki neljän merkin mittaiset ja niin edelleen.

Edelleen T_1:n avulla voidaan muodostaa luetteleva tietokoneohjelma T_2, joka poimii T_1:n tulosteista kaikki lukuteorian lauseet. T_2 siis luettelee kaikki lukuteorian lauseet, joille on olemassa hyväksyttävä todistus.

Edellisessä luvussa totesimme, että ei voida muodostaa luettelevaa tietokoneohjelmaa, joka luettelee kaikki todet lukuteorian lauseet. Koska T_2 luettelee kaikki lukuteorian lauseet, joille on hyväksyttävä todistus, vedämme seuraavan johtopäätöksen: On olemassa tosia lukuteorian lauseita, joita ei voida todistaa nykyisen todistuskäsityksen mukaisesti. Sama pätee mille tahansa todistuskäsitykselle, jossa todistuksen pätevyys voidaan laskea.

[6]Siihen, kuinka tämä tehdään, emme tässä mene, mutta taikasanat ovat 1. kertaluvun predikaattilogiikka + ZFC.

[7]Vaikka tällainen tietokoneohjelma voidaan teoriassa tehdä, käytännössä se on niin hidas, että sen käyttäminen todistusten etsimiseen on aivan toivotonta.

4.6 Pähkinöitä

1. Osoita, että ei voida muodostaa tietokoneohjelmaa T_0 siten, että T_0 saa syötteenään tietokoneohjelman T, ja palauttaa merkkijonon "Tosi", jos T pysähtyy kaikilla syötteillä ja merkkijonon "Epätosi", jos on vähintään yksi syöte, jolla T ei pysähdy. (Tässä tehtävässä valitaan ohjelmointikieli ja oletetaan, että kaikki tehtävässä mainitut ohjelmat on kirjoitettu tällä kielellä.)

2. Edellisen kappaleen lopussa annoimme argumentin sille, että on olemassa vähintään yksi tosi lukuteorian lause, jota ei voida todistaa nykyisen todistuskäsityksen mukaisesti. Osoita käyttäen tässä kirjoitelmassa mainittuja tuloksia, että tällaisia lukuteorian lauseita on ääretön määrä.

3. Olkoon T luetteleva tietokoneohjelma. Osoita, että voidaan muodostaa tietokoneohjelma, joka antaa vastauksen "Kyllä" täsmälleen niillä syötteillä, jotka T luettelee (ja muilla syötteillä jää jumiin).

4. Olkoon T tietokoneohjelma, joka joillan (ennaltamäärätyssä äärellisessä aakkostossa annetuilla) syötteillä antaa tuloksen "Kyllä", joillain (samassa aakkostossa annetuilla) syötteillä antaa tuloksen "Ei" ja jää jumiin lopuilla (samassa aakkostossa annetuilla) syötteillä. Osoita, että voidaan muodostaa luetteleva tietokoneohjelma, joka luettelee täsmälleen ne syötteet, joilla T antaa tuloksen "Kyllä".

Luku 5

$P = NP$-ongelma - mikä se on?

5.1 Johdanto

Tässä kirjoitelmassa esittelemme erään kuuluisimmista avoimista matemaattisista ongelmista. Kyse on $P = NP$-kysymyksestä, joka kysyy, voidaanko tiettyjä tietokoneella suoritettavia laskentoja suorittaa nopeasti. Yhtälössä P tarkoittaa nk. polynomisessa ajassa laskettavia ongelmia ja NP nk. polynomisessa ajassa ei-deterministisesti laskettavia ongelmia. Nämä käsitteet määritellään myöhemmin tässä tekstissä. Yhtälö $P = NP$ siis väittää, että nämä kaksi ongelmaluokkaa ovat samat. Onko näin? Sitä kukaan ei tiedä.

Koska kyse on matemaattisesta ongelmasta, ratkaisuksi vaaditaan todistusta, jommalle kummalle seuraavista:

- **Todistus sille, että kyseiset luokat ovat samat**. Tämä voitaisiin todistaa mm. tekemällä tiettyjä NP-luokkaan kuuluvia ongelmia nopeasti ratkova tietokoneohjelma.

- **Todistus sille, että luokat ovat eri.** Tämä tarkoittaisi todistusta sille, että on mahdotonta tehdä tiettyjä NP-luokkaan kuuluvia ongelmia nopeasti ratkovaa tietokoneohjelmaa.

Jos joku saa $P = NP$ -kysymyksen ratkaistua, Clay Mathematics Institute on luvannut ratkaisusta miljoonan dollarin palkinnon. Yllättävää kyllä, palkinto olisi periaatteessa mahdollista saada riittävän hyvällä Miinaharava-pelin analyysilla.

5.2 Laskennasta

Tässä kirjoitelmassa tarkoitamme tietokoneohjelmalla ohjelmaa, joka saa aluksi yhden syötteen, joka on äärellinen merkkijono[1], laskee sitä aikansa, ja lopuksi palauttaa joko merkkijonon ”Kyllä” tai merkkijonon ”Ei”. Tavallisessa tietokoneessa on rajallinen määrä muistia, ja tavallisissa yhteyksissä on rajallinen määrä aikaa laskennalle, mutta laskennan teoreettisessa tarkastelussa oletetaan, että nämä suureet ovat riittävän suuria käsilläolevan laskennan loppuunviemiseksi, olivatpa ne kuinka suuria tahansa, kunhan ne ovat äärellisiä. Samoin ohjelman saama syöte saa olla kuinka pitkä tahansa, kunhan se on äärellinen.

5.3 Polynominen aika

Olkoon T tietokoneohjelma edellisessä luvussa kuvaillussa mielessä. Merkitään $f(1)$:llä pisintä aikaa, jonka ohjelma käyttää yhden merkin mittaisen syötteen käsittelyyn. Yhden merkin mittaisia syötteitä on useita, ja merkitsemme siis $f(1)$:llä maksimia kaikkien yhden merkin mittaisten syötteiden vaatimista ajoista. Merkitään $f(2)$:lla pisintä aikaa, jonka ohjelma käyttää kahden merkin mittaisen syötteen käsittelyyn ja niin edelleen. Näin saamme funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (voidaan olettaa, että laskenta-ajat ovat kokonaislukuja ja voidaan asettaa $f(0) = 0$).

Tyypillisesti $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, ja meitä kiinnostava kysymys on:

Kuinka nopeasti f lähenee ääretöntä?

[1] Yhteen merkkijonoon voidaan koodata vaikka millä mitalla tietoa, eli ohjelmamme voi saada syötteeksi esimerkiksi useita lukuja vaikkapa puolipisteellä erotettuna

Sanomme, että ohjelman T vaatima aika on *polynominen*, jos on olemassa (kokonaiskertoiminen) polynomi Q, jolle $f(n) \leq Q(n)$ kaikilla n. Tässä sillä, mikä on ykköstä edustava ajanjakso f:n määritelmässä ei ole merkitystä. Samat ohjelmat ovat polynomisia, valittinpa tuo ajanjakso lyhyeksi tai pitkäksi.

Jos ohjelman T vaatima aika on polynominen, ohjelmaa T pidetään yleensä nopeana. Tämä johtuu siitä, että n:n kasvaessa minkä tahansa polynomin $Q(n)$ arvo kasvaa kohti ääretöntä suhteellisen hitaasti. Polynominen ohjelma onkin oikeasti nopea, jos polynomin Q aste on pieni. Jos polynomin Q aste on suuri, voi ohjelma olla käytännössä liian hidas vaikka se olisikin polynominen.

Jos ohjelman T vaatima aika ei ole polynominen, se on niin hidas, että laskenta yhtään pidemmillä syötteillä on käytännössä toivotonta. Eksponenttifunktio $f(n) = 2^n$ kasvaa nopeammin kuin mikään polynomi. Voidaan siis todistaa, että jos Q on polynomi, on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että kaikilla $n > n_0$ pätee $f(n) > Q(n)$. Ei-polynomisten tietokoneohjelmien aikavaatimukset ovatkin melko usein joitakin eksponenttifunktion johdannaisia.

Esimerkki 1 *Olkoon T ohjelma, joka saa syötteenään listan lukuja sekä luvun k, ja joka tutkii käymällä listan läpi, onko luku k listassa. Tällaiselle ohjelmalle parhaan polynomin Q aste on yksi, eli T on polynominen ja nopea.*

Esimerkki 2 *Tässä esimerkissä puhutaan alkulukutesteistä, eli ohjelmista, jotka saavat syötteenään kymmenjärjestelmässä esitetyn luvun ja palauttavat tiedon siitä, onko kyseessä alkuluku. Huomautamme, että kun puhumme siitä, onko joku alkulukutesti polynominen emme tarkoita, että onko ohjelman suoritusaika korkeintaan joku syötteenä saadun luvun polynomi, vaan sitä, onko ohjelman suoritusaika korkeintaan joku syötteenä saadun luvun kymmenjärjestelmäesityksen pituuden polynomi. Esimerkiksi luvun 1000000 kymmenjärjestelmäesityksessä on seitsemän merkkiä, mikä on huomattavasti vähemmän kuin miljoona.*

Jos käymme läpi kaikki kaikki luonnolliset luvut, jotka ovat korkeintaan syötteenä annetun luvun neliöjuuri ja testaamme jokaisen kohdalla, onko kyseessä syötteen tekijä, saamme aikaan alkulukutestin, mutta *sen vaatima laskenta-aika on niin pitkä, että testimme ei ole polynominen. Jos n on syötteenä saadun luvun kymmenjärjestelmäesityksen pituus, syötteenä saadun luvun neliöjuurta pienempiä lukuja on yli $10^{n/2-2} = \frac{1}{100}\sqrt{10}^n$, mikä on suurempi kuin 2^n, kun n on riittävän suuri.*

Paras tunnettu varmasti toimiva alkulukutesti on polynominen, mutta paras sille tunnettu polynomi Q on astetta seitsemän. Näin suuri aste tarkoittaa sitä, että käytännössä tätä ohjelmaa ei käytetä alkulukujen testaamiseen, vaan alkulukutesteinä käytetään nopeampia ohjelmia, jotka toimivat vain tietyllä todennäköisyydellä, joka tosin saadaan huomattavan korkeaksi.

5.4 Päätösongelmat

Olkoon M (jossain äärellisessä aakkostossa esitettyjen) äärellisten merkkijonojen joukko, ja M', M'' joukon M jako kahteen osaan eli *päätösongelma*. Olkoon $m \in M$. Meitä kiinnostaa, kumpaan osaan, M' vai M'', m kuuluu. Olkoon T tietokoneohjelma, joka ratkaisee tämän, eli T on ohjelma, joka saa syötteenään m:n, ja T kertoo, kumpaan osaan, M' vai M'', syöte m kuuluu. Oletamme siis, että T toimii näin kaikkien M:n alkioiden kohdalla. Tällaisessa tapauksessa sanomme, että T *ratkaisee päätösongelman* M', M''.

Jos jollekin päätösongelmalle M', M'' on mahdollista kirjoittaa sen ratkaiseva tietokoneohjelma, joka toimii polynomisessa ajassa, sanomme, että M', M'' on polynominen. Polynomisten päätösongelmien luokkaa merkitään kirjaimella P.

5.5 Kauppamatkustajan ongelma

Tutkitaan seuraavaa päätösongelmaa: On annettu joukko kaupunkeja sekä hinnat kaikkien kahden kaupungin välisille matkoille. On lisäksi annettu maksimihinta h. Kauppamatkustajan ongelma kuuluu: Voidaanko tehdä kiertomatka, joka alkaa jostain kaupungista ja päättyy samaan kaupunkin niin, että jokaisessa kaupungissa käydään kerran ja kierroksen yhteishinta on korkeintaan h?

Jos haluamme saada tämän päätösongelman edellisessä kappaleessa esitettyyn formalismiin, M' siis kuvaa niitä systeemejä s (jossain merkkijonokoodauksessa esitettynä; tässä siis s sisältää tiedot kaupungeista, niiden välisten matkojen hinnoista sekä maksimihinnan h), joille kyseisenlainen kiertomatka on olemassa, ja M'' kuvaa muita systeemejä.

Kukaan ei tiedä, onko tämä päätösongelma polynominen, eli onko nopein mahdollinen tämän päätösongelman ratkaiseva tietokoneohjelma polynominen. Lukijalla kävi ehkä mielessä, että ongelma voitaisiin ratkaista käymällä kaikki mahdolliset reitit läpi ja katsomalla jokaisen reitin kohdalla, onko sen hinta korkeintaan h. Syötteen pituuden kasvaessa tällaisen laskennan viemä aika kasvaa kuitenkin nopeammin kuin mikään syötteen pituuden polynomi, eli tämä ei kelpaa polynomiseksi ratkaisuksi. Polynomisessa ajassa tämän ongelman ratkaisevan tietokoneohjelman pitäisi siis olla huomattavasti ovelammin laadittu.

Kuitenkin seuraavanlainen polynominen tietokoneohjelma T on olemassa: Olkoon s kuten edellä ja k on kiertomatka systeemissä s. T saa syötteenään parin s, k ja ratkaisee, onko k sellainen kierros, että sen hinta on korkeintaan h.

5.6 Ei-deterministinen polynominen aika

Olkoon M', M'' päätösongelma. Oletetaan, että jokaiselle $m \in M'$ on olemassa toinen merkkijono m', jota kutsutaan m:n *todistajaksi*. Sallimme myös sen, että merkkijonolla voi useita todistajia. Lisäksi oletamme, että m:n lyhyimmän todistajan pituus on korkeintaan joku m:n pituuden polynomi. Lisäksi oletamme, että jos $m \in M''$, m:llä ei ole todistajia.

Esimerkiksi Kauppamatkustajan ongelma on tällainen päätösongelma: Systeemin s todistaja on kiertomatka k, jonka hinta on korkeintaan h.

Sanomme, että M', M'' on ei-deterministinen polynominen päätösongelma, jos on olemassa polynomisessa ajassa toimiva tietokoneohjelma T, joka saa syötteenään parin m, m' ja ratkaisee, onko m' jonon m todistaja. Ei-determinististen polynomisten päätösongelmien luokkaa merkitään NP. Kuten edellisen luvun viimeisessä kappaleessa totesimme, Kauppamatkustajan ongelma on ei-deterministinen polynominen päätösongelma.

Huomautamme, että jos M', M'' on ei-deterministinen polynominen päätösongelma, on olemassa tietokoneohjelma T, joka ratkaisee tämän päätösongelman, joskin epärealistisen hitaasti. T muodostetaan seuraavasti: Olkoon Q polynomi siten, että jos m on pituutta n oleva syöte, jolla on todistaja, m:llä on korkeintaan pituutta $Q(n)$ oleva todistaja. Nyt, kun tietokoneohjelmalle T annetaan syöte m, se käy kaikki korkeintaan pituutta $Q(n)$ olevat merkkijonot läpi ja kokeilee jokaisen kohdalla, onko kyseessä m:n todistaja. Syötteen pituuden kasvaessa tällaisen laskennan viemä aika kasvaa kuitenkin nopeammin kuin mikään syötteen pituuden polynomi, eli tämä ei kelpaa polynomiseksi ratkaisuksi.

Sivuhuomautuksena vielä mainittakoon, että nimitys ei-deterministinen polynominen tulee siitä, että tällaiset ongelmat voidaan ratkaista polynomisessa ajassa kuvitteellisilla tietokoneohjelmilla, jotka toimivat ”ei-deterministisesti” eli osaavat arvata oikein. NP-päätösongelma voidaan ratkaista ei-deterministisesti niin, että ensin arvataan oikein todistaja ja sen jälkeen tarkastetaan polynomisessa ajassa, että arvattiin oikein.

5.7 Onko $P = NP$?

Nyt saamme muotoiltua $P = NP$-kysymyksen. Se siis kysyy, onko luokka P sama kuin luokka NP. Jos T on jonkin päätösongelman M', M'' ratkaiseva polynominen tietokoneohjelma, voidaan ajatella, että jokaisen M':uun kuuluvan syötteen todistaja on tyhjä merkkijono, joten T toimii myös ei-deterministisessä polynomisessa ajassa. Siis P sisältyy luokkaan NP. Kysymys siis kuuluu: Voidaanko jokainen ei-deterministinen polynominen päätösongelma ratkaista polynomisessa ajassa, siis ohjelmalla, joka saa syötteekseen vain alkuperäisen syötteen eikä todistajakandidaattia? Kukaan ei tiedä. Yleisesti uskotaan, että nämä kaksi luokkaa ovat eri, mutta kukaan ei osaa todistaa, että kaikkia NP-ongelmia on mahdotonta ratkaista polynomisessa ajassa.

Sen verran kuitenkin tiedetään, että jos Kauppamatkustajan ongelma saataisiin ratkaistua polynomisessa ajassa, ratkaisusta osattaisiin muokata minkä tahansa NP-päätösongelman polynominen ratkaisu. Tällaisia NP-päätösongelmia, joiden polynominen ratkaisu ratkaisisi $P = NP$ -kysymyksen kertaheitolla on muitakin. Esimerkkinä tällaisesta mainittakoon seuraava:

Esimerkki 3 *Miinaharava-pelin tilanteella tarkoitamme mielivaltaisen kokoista Miinaharava-pelin tilannetta, jossa osa ruuduista on avattu ja osa avaamatta, ja kussakin avatussa ruudussa on numero, joka voi olla myös nolla. Lisäksi tilanteessa on asetettu lippuja osaan niistä ruuduista, joissa on miina. On myös mahdollista, että yhtään lippua ei ole asetettu. Oletamme kuitenkin, että liput on asetettu oikein, eli jokaisessa sellaisessa ruudussa, jossa on lippu, on myös miina.*

Nyt päätösongelmamme on seuraava: On annettu Miinaharava-pelin tilanne. Onko olemassa (muiden kuin liputettujen) miinojen sellaisia sijainteja, että ne sopivat annettuun tilanteeseen?

5.8 Lopuksi

NP ei suinkaan ole vaikeimpien mahdollisten päätösongelmien luokka. On olemassa päätösongelmia, jotka ovat ratkaistavissa tietokoneella[2], mutta jotka ovat niin vaikeita, että ne eivät kuulu edes luokkaan NP. Päätösongelmille on määritelty paljon muitakin luokkia kuin P ja NP, ja $P = NP$ -kysymyksen lisäksi myös paljon muita luokkia koskevia kysymyksiä on vastaamatta. $P = NP$ -kysymys on pelkästään näistä kuuluisin.

On olemassa myös päätösongelmia, joita mikään tietokoneohjelma ei ratkaise. Tällaisiin tutustuimme edellisessä kirjoitelmassa.

5.9 Pähkinöitä

1. Olkoon $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funktio, jolle on olemassa polynomi Q ja luonnollinen luku n_0 siten, että $f(n) \leq Q(n)$ aina, kun $n \geq n_0$. Osoita, että on olemassa polynomi Q' siten, että $f(n) \leq Q'(n)$ kaikilla

[2] Joskin käytännön kannalta epärealistisen hitaasti.

$n \in \mathbb{N}$. (Tämä tehtävä osoittaa, että tässä kirjoitelmassa annettu polynomisen aikavaatimuksen määritelmä on yhtäpitävä kirjallisuudesta yleisemmin löytyvän määritelmän kanssa.)

2. Tutkitaan Esimerkissä 3 esitettyä Miinaharavaa koskevaa päätösongelmaa. Osoita, että kyseinen ongelma kuuluu luokkaan NP.

3. Osoita, että jos Esimerkissä 3 esitetty Miinaharavaa koskeva päätösongelma saataisiin ratkaistua polynomisessa ajassa, saataisiin polynomisessa ajassa ratkaistua myös seuraava päätösongelma: On annettu Miinaharava-pelin tilanne ja suljettu ruutu r. Onko varmaa, että ruudussa r ei ole miinaa?

4. Onko $P = NP$?

Luku 6

Hex-pelin matematiikkaa

6.1 Johdanto

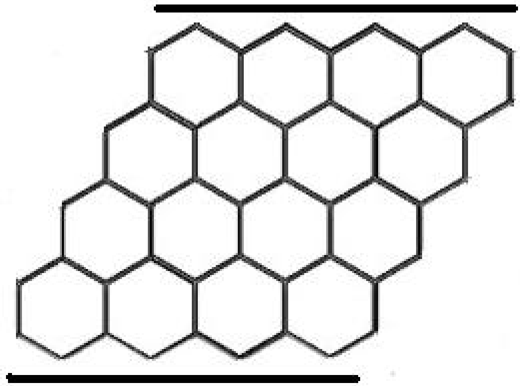
Hex on kahden pelaajan strategiapeli, jonka ovat keksineet toisistaan riippumatta matemaatikot Piet Hein ja taloustieteen Nobelinkin saanut John Nash[1]. Peli on siitä mielenkiintoinen, että sitä on mahdollista analysoida matemaattisesti aika pitkälle, mutta ei kuitenkaan niin pitkälle, että käytännön pelaaminen olisi orjallista kaavojen seuraamista.

Tässä kirjoitelmassa esittelemme Hexin ja todistamme muutaman peliä koskevan teoreeman. Esityksemme perustuu osin teokseen Browne [3].

6.2 Hexin säännöt

Hexiä pelataan timantinmuotoisella pelilaudalla, jolla on kuusikulmioista koostuva ruudutus (nk. heksaruudutus). Kaksi vastakkaista pelilaudan sivua on merkitty mustiksi ja toiset kaksi vastakkaista sivua valkoisiksi. (Katso kuva 1.) Piet Hein suositteli peliin 11×11 kuusikulmiosta eli *heksasta* koostuvaa lautaa, joka on nykyisin yleisimmin käytetty ja John Nash puolestaan 14×14 heksasta koostuvaa lautaa. Allekirjoittaneen suosikkikoko on 13×13.

[1] Anekdootin mukaan Nashin keksimänä peli tunnettiin nimellä *John* (englanninkielinen slangi-ilmaus vessalle), koska pelilauta muistuttaa vessan lattian laatoitusta.



Kuva 6.1: 4×4-lauta

Toinen pelaaja pelaa mustilla pelinappuloilla ja toinen valkoisilla. Pelinappuloita oletetaan olevan tarpeeksi niin, että ne eivät voi loppua kesken.

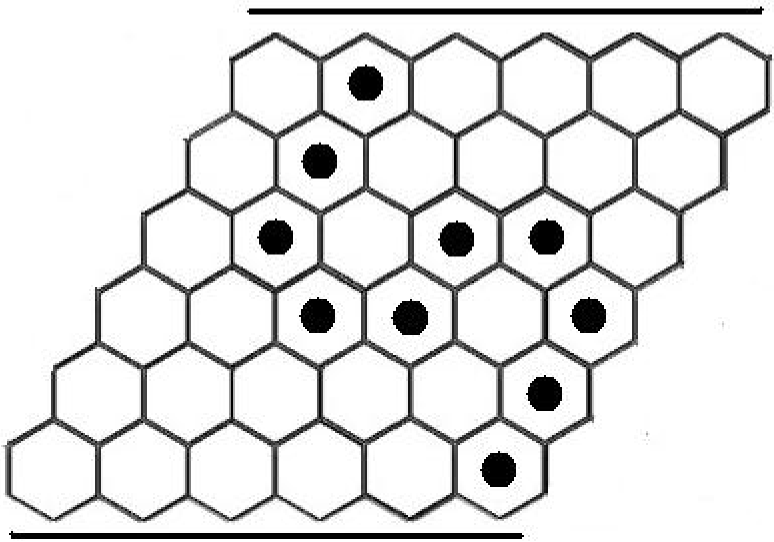
Peli alkaa tyhjältä laudalta. Vuorollaan pelaaja asettaa yhden omanvärisensä pelinappulan johonkin pelilaudan vapaaseen kuusikulmioon.

Pelin voittaa se pelaaja, joka saa yhdistettyä omanvärisensä pelilaudan sivut omanvärisistä, vierekkäisissä heksoissa sijaitsevista nappuloista koostuvalla nappulaketjulla. Voittava ketju saa mutkitella kuinka paljon tahansa, kunhan se yhdistää sivut. (Katso kuva 2.) Laudan kulmaheksojen katsotaan kuuluvan kumpaankin viereiseen sivuun.

6.3 Täyden informaation pelit

Tarkoitamme täyden informaation pelillä lauta- tai vastaavaa peliä, joka toteuttaa kaikki seuraavat ehdot:

- Pelissä ei ole satunnaisuutta (kuten nopanheittoa).
- Pelissä ei ole tietoa, jonka vain osa pelaajista tietäisi (kuten pelaajan kädessä olevat kortit.)



Kuva 6.2: Mustan voittopolku. Ylä- ja alalaidat on yhdistetty.

- Pelaajat tekevät siirrot vuorotellen. (Pelissä ei siis ole kivi-sakset-paperi -pelin tyyppistä yhtaikaista siirtojen valitsemista.)

Siis esimerkiksi shakki, go ja hex ovat täyden informaation pelejä.

Voittostrategialla tarkoitamme menetelmää, jota seuraamalla pelin voittaa varmasti. Tasapelistrategia tarkoittaa strategiaa, jota seuraamalla saa aikaan varmasti joko voiton tai tasapelin.

Voidaan todistaa seuraava teoreema. Todistus jätetään vaikeahkoksi harjoitustehtäväksi. Tehtävää tosin kannattaa yrittää vasta siinä vaiheessa, kun on lukenut tämän kirjoitelman loppuun ja saanut jonkunlaisen kuvan siitä, kuinka tällaisia asioita voidaan todistaa.

Teoreema 1 *Äärellisessä, kahden pelaajan täyden informaation pelissä jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia.*

Shakki on äärellinen peli, koska shakissa on sääntö, jonka mukaan peli on tasapeli, kun laudan asema on toistunut kolme kertaa. Näin ollen meillä on tulos, jonka mukaan shakissakin jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. Ei kuitenkaan tiedetä, mikä kyseisistä vaihtoehdoista pätee. On myös mahdollista (ja jopa luultavaa), että kyseiset strategiat ovat niin monimutkaisia, että ihmiset eivät koskaan tule tuntemaan niitä.

Edellisen tuloksen nojalla myös Hexissä jommalla kummalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. Hexistä tiedetään kuitenkin hiukan enemmänkin, ja tätä käsittelemme seuraavassa luvussa.

Teoreemalle saadaan helposti seuraava korollaari:

Korollaari 2 *Jos edellisessä teoreemassa peli ei voi päättyä tasapeliin, jommalla kummalla on voittostrategia.*

Huomautamme, että pelin äärellisyysehto on myös olennainen. On olemassa monimutkaisia joukko-opillisia kahden pelaajan täyden informaation pelejä, jotka toteuttavat seuraavat kaikki ehdot:

- Pelissä tehdään yhteensä ääretön jono siirtoja ja voittaja ratkaistaan tällaisen äärettömän siirtojonon perusteella.
- Jokainen peli päättyy jomman kumman pelaajan voittoon.
- Kummallakaan ei ole voittostrategiaa.

Jos tässä pelaajat ovat A ja B, jokaiselle A:n strategialle löytyy siis B:n strategia, joka voittaa sen, ja jokaiselle B:n strategialle löytyy A:n strategia, joka voittaa sen.

6.4 Hexin perustulokset

Tässä luvussa todistamme, että Hex-peli ei voi päättyä tasapeliin. Itse asiassa todistamme vahvemman tuloksen, jonka mukaan täyteen pelatulla laudalla toisella ja vain toisella pelaajalla on voittopolku. Todistamme myös, että Hexissä voittostrategia on pelin aloittajalla. Tämä tulos on kuitenkin teoreettinen olemassaolotulos, ja käytännön voittostrategiaa ei tunneta.

Teoreema 3 *Hex-peli ei voi päättyä tasapeliin.*

Todistus: Oletetaan, että lauta on pelattu täyteen. Osoitamme, että tässä tilanteessa toisella ja vain toisella pelaajalla on voittava nappulaketju. Teknisistä syistä oletamme, että myös laudan ulkopuolella on nappuloita, mustien sivujen vieressä mustia ja valkoisten sivujen vieressä valkoisia.

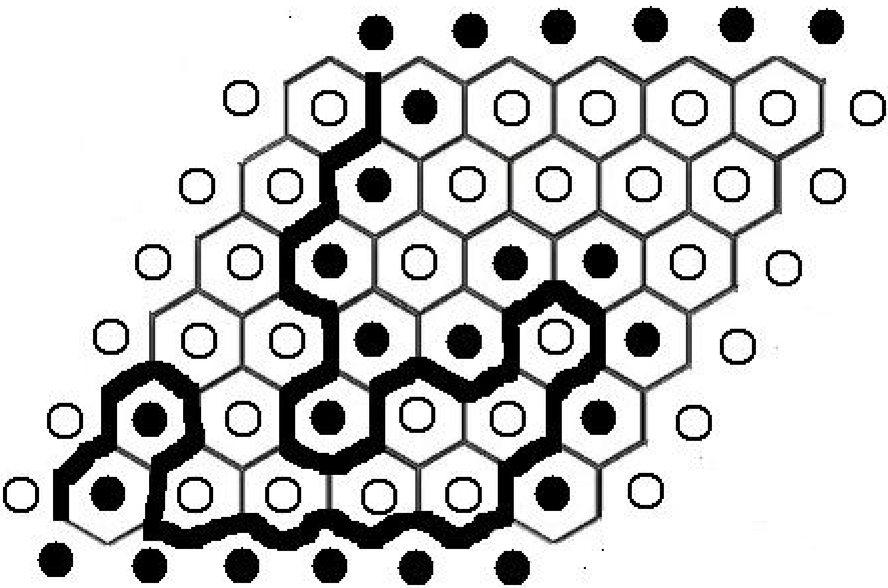
Oletetaan, että ala- ja yläsivut ovat mustia ja oikea ja vasen sivu valkoisia.

Muodostamme tässä todistuksessa polun, joka kulkee heksojen välisiä reunaviivoja pitkin niin, että kaikissa kohdissa polun vasemmalla puolella on valkea nappula ja polun oikealla musta nappula. Tässä siis oikea ja vasen määritellään suhteessa polkua kulkevaan henkilöön. Huomautamme, että jos olemme muodostaneet polkua n askelta ja tulleet kolmen heksan leikkauspisteeseen, voimme aina jatkaa polkua. Jos edessä on valkea nappula, jatkamme polkua oikealle ja jos edessä on musta nappula, jatkamme polkua vasemmalle.

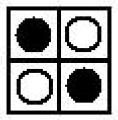
Aloitamme polun laudan vasemmasta alanurkasta. Jos siinä on valkoinen nappula, aloitamme sen alapuolelta (tällöin aloituspisteen alla on musta nappula laudan ulkopuolella), ja jos siinä on musta nappula, aloitamme sen vasemmalta puolelta (jolloin sen vasemmalla puolella on valkea nappula laudan ulkopuolella). Jatkamme polkua kunnes törmäämme laudan ylä- tai oikeaan laitaan. Edellisen kappaleen perusteella polkua voidaan jatkaa näin. Jos törmäämme laudan ylälaitaan, polun oikealla puolella on voittava musta ketju, ja jos törmäämme oikeaan laitaan, polun vasemmalla puolella on voittava valkea ketju. Siis jommalla kummalla pelaajalla on voittava ketju. (Polusta katso kuva 3).

Polkumme tosiaan päätyy lopulta joko oikeaan tai ylälaitaan. Se ei nimittäin voi päättyä silmukkaan, koska tällöin silmukan lopussa olisi vääränvärisiä nappuloita polun oikealla tai vasemmalla puolen.

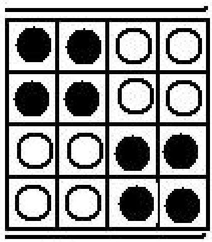
Perustelemme vielä sen, että polun toisella puolella on tosiaan voittava ketju. Oletetaan, että törmäsimme ylälaitaan. (Jos törmäsimme oikeaan laitaan, todistus menee samoin.) Jokaisen polkuun kuuluvan heksan sivun oikealla puolella on musta pelinappula. Koska kahdella peräkkäisellä polkuun kuuluvalla heksan sivulla on yhteinen kärki, yhteinen kärki on myös niillä peräkkäisillä heksoilla, joissa on mustat



Kuva 6.3: Vahvennettuna polku, joka konstruoitiin Teoreeman 3 todistuksessa.



Kuva 6.4: Ristileikkaus.



Kuva 6.5: Ruutulaudalla Hex voi päättyä tasapeliin.

pelinappulat. Kyseisillä heksoilla on myös yhteinen sivu, koska heksalaudalla kahdella heksalla on yhteinen sivu, jos niillä on yhteinen kärki. Siis edellämainittu musta ketju koostuu heksoista, joista kahdella peräkkäisellä on aina yhteinen sivu, joten kyseessä on voittoketju.

Lisäksi havaitsemme, että voittava ketju jakaa pelilaudan kahtia niin, että tilanne, jossa kummallakin on voittava ketju on mahdoton.□

Todistuksessa mainitut seikat tarkoittavat sitä, että ainoa keino blokata vastustaja Hex-pelissä on muodostaa oma voittava ketju. Käytännön pelissä tämä tarkoittaa sitä, että Hexissä hyökkääminen (oman ketjun muodostaminen) ja puolustaminen (vastustajan estäminen) ovat yksi ja sama asia.

Todistuksemme käytti olennaisesti hyväkseen sitä, että lautamme on heksalauta. Tätä käytetään hyväksi siinä vaiheessa, kun todetaan, että polun jommalla kummalla puolella on voittava ketju. Neliöruuduista koostuvalla laudalla olisi mahdollista tehdä nk. ristileikkaus (kuva 4), joka estäisi voittavan ketjun syntymisen.

Ristileikkauksen avulla on mahdollista tehdä neliöruuduilla pelattavalle Hex-pelille tasapelitilanne, joka on esitetty kuvassa 5.

Teoreema 4 *Hex-pelissä ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia.*

Todistus: Oletetaan, että toisena pelaavalla on voittostrategia S ja johdetaan ristiriita. Ensimmäisenä pelaava muodostaa strategian S' joka on muutoin sama kuin S, mutta siinä mustan ja valkoisen roolit on vaihdettu, ja lautaa on peilattu jomman kumman lävistäjän suhteen niin, että sivujen väritykset vastaavat uusia pelaajien rooleja.

Nyt ensimmäisenä pelaava voi pelata seuraavasti: Hän tekee ensimmäisen siirron mielivaltaisesti. Tämän jälkeen hän pelaa strategialla S' kuvitellen, ettei ole tehnyt ensimmäistä siirtoaan. Jos hänen jossain kohti peliä täytyy tehdä S':n mukaan ensimmäinen siirtonsa, hän lakkaa kuvittelemasta, ettei ole tehnyt ensimmäistä siirtoaan, tekee mielivaltaisen siirron ja kuvittelee jatkossa, ettei ole tehnyt uutta mielivaltaista siirtoaan. Jos hänen täytyy myöhemmin tehdä S':n mukaan se siirto, jota hän ei kuvittele tehneensä, hän lakkaa kuvittelemasta...

Koska S on voittostrategia, sitä on myös S'. Koska siitä siirrosta, jota ensimmäinen pelaaja ei kuvittele tehneensä, ei ole ensimmäisenä pelaavalle missään tilanteessa haittaa, ensimmäisenä pelaava voittaa. Ristiriita sen kanssa, että toisena pelaavalla on voittostrategia.

Koska kyseessä on äärellinen peli, joka ei voi päättyä tasapeliin, jommalla kummalla on voittostrategia. Koska edellisen argumentin nojalla toisena pelaavalla ei ole voittostrategiaa, voittostrategia on ensimmäisenä pelaavalla.□

Samanlaisella argumentilla voidaan näyttää, että missä tahansa äärellisessä kahden pelaajan täyden informaation pelissä, joka ei voi päättyä tasapeliin, jossa pelaajien roolit ovat symmetriset eikä siirrosta ole missään tapauksessa siirron tekijälle haittaa, on ensimmäisenä pelaavalla voittostrategia. Jos muut ehdot pätevät, mutta peli voi päättyä myös tasapeliin, samanlaisella argumentilla voidaan näyttää, että joko ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia tai peli päättyy optimaalisella pelillä tasapeliin.

Tässä on huomattava, että ensimmäisen pelaajan voittostrategia olemassaolon todistaminen on puhdas olemassaolotodistus: Se kertoo, että ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia, mutta se ei mitään siitä, *millainen* tuo voittostrategia on. Hexin tapauksessa sitä ei tiedetäkään, joten käytännön pelaaminen on mielekästä.

6.5 Reilun pelin aikaansaaminen

Kuten edellisessä luvussa totesimme, ensimmäisenä pelaavalla on teoreettinen etu. Pelikokemus on osoittanut, että ensimmäisenä pelaavalla on huomattava etu myös käytännön peleissä. Tämän johdosta Hex-pelin alussa käytetääkin nk. kakunleikkaussääntöä (englanniksi *pie rule*), joka toimii seuraavasti:

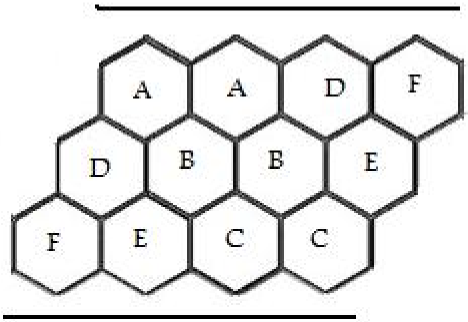
- Ensimmäisenä pelaava tekee mustilla aloitussiirron.
- Tämän jälkeen toisena pelaava valitsee, pelaako hän mustilla vai valkoisilla.
- Tämän jälkeen peli jatkuu valkean pelaajan siirrolla ja sen jälkeen normaalisti vuorotellen värejä.

Tätä protokollaa noudattaen ensimmäisen mustan siirron ei kannata olla liian hyvä, vaan sellainen, että kummallakin siirron jälkeen suunnilleen yhtä hyvät voitonmahdollisuudet. Kakunleikkaussääntö onkin saanut nimensä operaatiosta, jossa jaetaan kakku kahteen osaan niin, että ensimmäinen ruokailija leikkaa kakun kahtia ja toinen ruokailija valitsee kumman osan ottaa. Toinen osa jää halkaisijalle.

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että käytettäessä Hexissä kakunleikkaussääntöä on toisena pelaavalla teoreettinen voittostrategia.

Jos toinen pelaajista on heikompi, ei kakunleikkaussääntöä yleensä käytetä, vaan heikompi pelaaja yksinkertaisesti aloittaa pelin. Hänellä on teoreettinen etu, ja myös jonkunasteinen käytännön etu. Koska voittostrategiaa ei tunneta, ei etu ole paremmalle pelaajalle ylitsepääsemätön.

Voisi olla houkutteleva idea antaa heikommalle pelaajalle tasoitusta niin, että hän pelaa ylä- ja alalaitoja yhdistäen, ja lauta on tässä suunnassa kapeampi. Tämä idea ei kuitenkaan toimi, koska tällöin on olemassa tunnettu voittostrategia.



Kuva 6.6: Ylä- ja alasivuja yhdistävän voittostrategia.

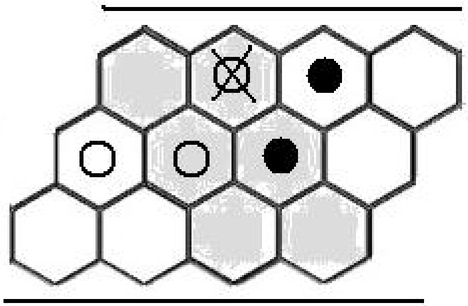
Teoreema 5 *Oletetaan, että meillä on Hex-lauta, joka on pystysuunnassa $n-1$ heksan kokoinen ja vaakasuunnassa n heksan kokoinen. Tällöin ylä- ja alalaitoja yhdistävällä pelaajalla on tunnettu voittostrategia, vaikka hän pelaisi toisena.*

Todistus: Merkitään laudan heksat kirjaimilla kuten kuvassa 6.

Oletetaan, että ylä- ja alalaitoja yhdistävä pelaa toisena.

Nyt toisena pelaavan voittostrategia on se, että hän pelaa aina heksaan, missä on sama kirjain kuin vastustajan edellisenä pelaamassa heksassa. Todistamme, että tämä on voittostrategia.

Oletetaan, että toinen pelaaja pelaa tällä strategialla, ja tehdään vastaoletus, että ensimmäisenä pelaavalla on voittava ketju P. Oletamme, että ketju alkaa vasemmasta laidasta ja päättyy oikeaan laitaan. Voidaan olettaa, että voittoketju on minimaalinen niin, että se ei leikkaa itseään. Olkoon h ketjun ensimmäinen heksa, jossa ketju käy joidenkin oikeanpuoleisten heksojen A, B tai C kautta. Olkoon h' ketjun edellinen heksa. Koska h:ssa ja h':ssa ei voi olla samaa kirjainta, on h yläviistoon h';sta. Olkoon h' ketjun m:s nappula ja Q ketjun m ensimmäistä nappulaa. Olkoon R toisen pelaajan vastaukset Q:ta edustaviin siirtoihin ylläkuvaillulla voittostrategialla. Nyt Q ja R muodostavat "pussin", jonka sisälle h jää, eikä voittoketju voi edetä maaliinsa kulkematta sellaisen heksan läpi, jossa on R:n nappula (mikä on mahdotonta sääntöjen perusteella) tai Q:n nappula (mikä on mahdotonta, koska oletimme, ettei



Kuva 6.7: Musta on pelannut valkean rastilla merkityn nappulan pussiin.

voittoketju leikkaa itseään.) (Pussi on kuvattu kuvassa 7.)

Siis ensimmäisenä pelaavalla ei voi olla voittoketjua. Koska peli ei voi päättyä tasapeliin, toisena pelaava voittaa, joten hänen strategiansa on voittostrategia.

Vaikka olemme yllä käsitelleet 4×3 lautaa, nähdään helposti, että annettu argumentti yleistyy kaikille laudan koille $n \times (n-1)$. $\square$

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että sama pätee myös siinä tapauksessa, että pysty- ja vaakasuuntien kokojen ero on enemmäin kuin 1, sekä se, että sama pätee myös silloin, kun ylä- ja alalaitoja yhdistävä pelaaja aloittaa pelin.

6.6 Mistä pelivälineet?

Siltä varalta, että lukijalle iski kipinä päästä pelaamaan, selitämme tässä luvussa, kuinka hankkia pelivälineet. Hex-settejä ei käsittääkseni myydä missään, joten pelivälineet joutuu valmistamaan itse.

Roolipelivälineitä myyvät kaupat myyvät tuotetta nimeltä Battle Mat. Se on ohut vinyylilauta, jossa on toisella puolella tavallinen ruudutus ja toisella puolella heksaruudutus. Siitä on helppo leikata halutun kokoinen Hex-lauta. Suomessa Battle Matia myy mm. Fantasiapelit (`http://www.fantasiapelit.fi`). Hex-nappuloina voidaan käyttää Go-pelin pelinappuloita eli ”kiviä”, joita Suomessa myy Gaimport (`http://www.kolumbus.fi/gaimport/`). Onnekkaan yhteensattuman ansiosta Battle Mat, jossa on yhden tuuman kokoiset heksat on juuri oikean kokoinen standardeille Go-kiville.

Koska Hexissä nappuloita ei koskaan siirretä tai poisteta laudalta, sitä voi pelata myös kynällä ja paperila. Tähän tarkoitukseen lautoja voi tulostaa Hex Wikistä (`http://hexwiki.amecy.com/index.php/Printable_boards`).

Internetissä Hexiä voi pelata esimerkiksi Little Golemissa (www.littlegolem.net) kirjepelin tahtiin. Little Golem tarjoaa 13×13 ja 19×19 -lautakoot.

6.7 Pähkinöitä

1. Olkoon P äärellinen, kahden pelaajan täyden informaation peli, jossa tasapeli on mahdoton. Oletetaan, että P:ssä on kakunleikkaussääntö ensimmäisen siirron jälkeen. Osoita, että toisena pelaavalla on voittostrategia. (Voit olettaa tunnetuksi, että kaikissa kahden pelaajan äärellisissä täyden informaation peleissä, joissa tasapeli ei ole mahdollinen, on jommalla kummalla pelaajalla voittostrategia.)

2. Oletaan, että Hexissä laudan pystykoko on pienempi kuin vaakakoko, ja ylä- ja alalaitoja yhdistävä pelaa toisena. Konstruoi ylä- ja alalaitoja yhdistävälle voittostrategia.

3. Sama kuin edellä, mutta ylä- ja alalaitoja yhdistävä aloittaa pelin.

4. Teoreeman 5 todistuksessa oletettiin, että voidaan valita voittoketju, joka ei leikkaa itseään. Osoita, että tämä on mahdollista. Osoita siis, että jos P' on voittoketju, joka leikkaa itseään, P':n sisällä on voittoketju P, joka ei leikkaa itseään.

5. Osoita, että kaikissa kahden pelaajan äärellisissä täyden informaation peleissä jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. (Vihje: Induktio pelin mahdollisista lopputiloista taaksepäin.)

Luku 7

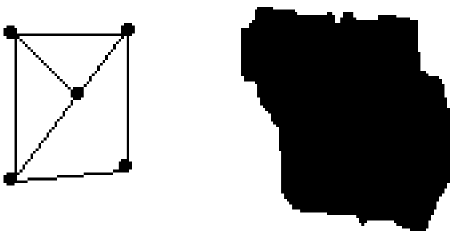
Yhtenäisyydestä

7.1 Johdanto

Tarkastellaan kuvassa 1 näkyviä verkkoa[1] ja $\mathbb{R}^2$:n (eli tason) osajoukkoa. Niillä on yhteinen ominaisuus: Ne ovat kumpikin yhtenäisiä. Kaikki verkot ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukot eivät ole yhtenäisiä. Esimerkiksi Kuvassa 2 oleva verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko koostuvat kumpikin kolmesta yhtenäisestä

[1]Verkko koostuu solmuista, sekä kaarista, joista jokainen yhdistää kaksi solmua. Suuntaamattomassa verkossa jokaista solmuparia yhdistää korkeintaan yksi kaari. Suunnatussa verkossa jokaiselle kaarelle on määritelty suunta, eli kaarella on alku- ja loppusolmut, ja solmuparin välillä voi olla kaksi eri suuntiin kulkevaa kaarta. Tässä kirjoitelmassa verkot ovat suuntaamattomia, jos muuta ei mainita.

Kuva 7.1: Yhtenäinen verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.



Kuva 7.2: Epäyhtenäinen verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.

komponentista.

Kuvan 2 verkko voidaan jakaa kolmeen osaan niin, että osien välillä ei ole verkon kaaria, ja kuvassa 2 näkyvä $\mathbb{R}^2$:n osajoukko voidaan puolestaan jakaa kolmeen osaan niin, että osat ovat kaukana toisistaan. Kuvan 1 objekteilla ei vastaavaa ominaisuutta ole.

Sekä verkkojen yhtenäisyyttä että $\mathbb{R}^2$:n osajoukkojen yhtenäisyyttä kuvaavat teoriat ovat hyvin tunnettuja.

Matemaattista mieltä kiinnostaa kuitenkin kysymys: Onko verkon ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyydellä (ja vastaavasti yhtenäisillä komponenteilla) jotain yhteistä? Toisin sanoen, onko olemassa yleistä yhtenäisyyden määritelmää, josta seuraisi erikoistapauksina sekä verkon että $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyys?

Paljastuu, että tällainen teoria on olemassa, ja se kehitettiin 1900-luvun alkupuolella, joskin nykyään se on painunut suurelta osin unholaan. Se löytyy teoksesta Čech[4], luvuista 14 ja 20. Esitämme sen alla huomattavasti mukaillen.

Esitämme teorian todistuksineen. Matemaattisen tekstin lukemiseen tottumattomat lukijat voivat sivuuttaa todistukset ja vain uskoa tulokset. Niitä lukijoita varten, jotka eivät tunne joukko-opin notaatioita, liitteessä on todellinen crash course aiheesta.

7.2 Lähipisteavaruus

Tutkitaan $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoa $A = \{(x, 0) \mid 0 < x < 1\}$. Sillä on sellainen ominaisuus, että pisteet $(0, 0)$ ja $(1, 0)$ eivät kuulu kyseiseen joukkoon, mutta kuitenkin ovat lähellä joukkoa A. Vastaavasti, jos B on verkon solmujen joukon osajoukko, voidaan ajatella, että solmu on lähellä joukkoa B, jos solmusta on kaari johonkin joukon B solmuun.

Sekä verkon että $\mathbb{R}^2$:n osajoukon rakenne voidaan siis ilmaista läheisyyden avulla: Kerrotaan, mitkä pisteet ovat lähellä mitäkin tutkittavan olion osajoukkoa. Seuraavaksi aksiomatisoimmekin lähelläolemisrelaation, eli annamme sellaisen lähelläolemisen määritelmän, että sitä voidaan soveltaa sekä verkkoihin että $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoihin. Seuraavat ominaisuudet tuntuvat luonnollisilta lähelläolemisen ominaisuuksilta.

- Jos x kuuluu joukkoon A, niin se on lähellä joukkoa A.
- Mikään piste ei ole lähellä tyhjää joukkoa.
- Jos $A \subset B$, ja piste x on lähellä joukkoa A, niin x on myös lähellä joukkoa B.

Itse asiassa ilmenee, että nämä ominaisuudet ovat riittäviä sen teorian kehittämiseen, minkä teemme tässä kirjoitelmassa.

Nyt muodollinen määritelmä:

Olkoon X joukko. Merkitään $\mathcal{P}(X)$:llä kaikkien X:n osajoukkojen[2] joukkoa.

Pari $(X, \bar{\in})$ on *lähipisteavaruus*, jos X on joukko ja $\bar{\in}$ on relaatio $\bar{\in} \subset X \times \mathcal{P}(X)$, joka toteuttaa seuraavat aksioomat:

1. Jos $A \subset X$ ja $a \in A$, niin $a \bar{\in} A$.
2. $x \bar{\in} \emptyset$ ei päde millään $x \in X$.
3. Jos $A \subset B \subset X$ ja $x \in X$, jolle $x \bar{\in} A$, niin tällöin $x \bar{\in} B$.

Jos $x \bar{\in} A$, sanomme, että x on joukon A lähipiste. Jos $A \subset X$, merkitään $\operatorname{cl} A = \{x \in X \mid x \bar{\in} A\}$.

[2] Joukon X osajoukoiksi lasketaan myös joukot $\emptyset$ ja X.

Seuraavaksi selitämme, kuinka verkot ja tason osajoukot voidaan mieltää lähipisteavaruuksina.

Olkoon (X, S) verkko, missä X on solmujen joukko ja S kaarien joukko. Määritellään, että jos $x \in X$ ja $A \subset X$, niin x on joukon A lähipiste, $x \bar{\in} A$, jos $x \in A$ tai solmusta x on kaari johonkin joukon A solmuun. Kiinnostunut lukija voi helposti tarkistaa, että antamamme lähipisteen määritelmä verkossa toteuttaa kaikki lähipisterelaation aksioomat. Nyt verkko (X, S) voidaan mieltä lähipisteavaruutena $(X, \bar{\in})$.

Olkoon sitten $X \subset \mathbb{R}^2$. Jos $x, y \in X$, merkitään $d(x, y)$:llä pisteiden x ja y etäisyyttä (linnuntietä). Jos $A \subset X$ ja $x \in X$, sanomme, että x on joukon A lähipiste, $x \bar{\in} A$, jos kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla $\epsilon > 0$ on olemassa $y \in A$, jolle $d(x, y) < \epsilon$. Kiinnostunut lukija voi tarkistaa, että antamamme lähipisteen määritelmä toteuttaa kaikki lähipisteavaruuden aksioomat. Nyt X voidaan mieltää lähipisteavaruutena $(X, \bar{\in})$.

Olkoon $X = \mathbb{R}^2$. Esimerkiksi joukon $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) < 1\}$ lähipisteiden joukko on $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) \leq 1\}$. Toisena esimerkkinä joukon $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, 0) \leq 1\}$ lähipisteiden joukko on joukko A itse.

Jos $X \subset \mathbb{R}^2$, $(X, \bar{\in})$ toteuttaa vielä seuraavat ehdot:

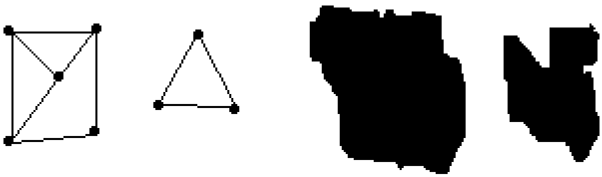
- Kaikilla $A, B \subset X$ ja kaikilla $x \in X$ pätee $x \bar{\in} (A \cup B)$ jos ja vain jos $x \bar{\in} A$ tai $x \bar{\in} B$.
- Kaikilla $A \subset X$ pätee $\operatorname{cl} \operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$.

Nämä ehdot toteuttavia lähipisteavaruuksia kutsutaan topologisiksi avaruuksiksi, ja ne näyttelevät hyvin keskeistä roolia modernissa matematiikassa.

7.3 Yhtenäisyys

Tutkitaan kuvassa 2 esiintyviä verkkoa ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoa, jotka kumpikin koostuvat kolmesta komponentista. Laittamalla kaksi komponenttia yhteen lokeroon ja yksi komponentti toiseen lokeroon, havaitaan, että ne voidaan kumpikin jakaa kahteen erilliseen osaan (ja helposti havaitaan, että mistä tahansa yhtä suuremmasta komponenttimäärästä

Kuva 7.3: Kahdesta komponentista koostuva verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko



koostuva kokonaisuus voidaan aina jakaa kahteen osaan, mutta kahdesta komponentista koostuvaa kokonaisuutta ei voida jakaa useampaan kuin kahteen osaan). Kuvan 1 objekteilla, jotka ovat yhtenäisiä, ei tätä ominaisuutta ole. Näin ollen määrittelemmekin epäyhtenäisyyden käyttäen tätä ideaa:

Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus. Sanomme, että X on *epäyhtenäinen*, jos on olemassa $A, B \subset X$ siten, että seuraavat ehdot pätevät:

1. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.
2. $A \cap B = \emptyset$
3. $A \cup B = X$.
4. $\mathrm{cl}\, A = A$ ja $\mathrm{cl}\, B = B$.

Viimeinen ehto voidaan ilmaista myös muodossa

- Jos $x \in B$, niin $x \bar{\in} A$ ei päde ja jos $x \in A$, niin $x \bar{\in} B$ ei päde.

Kyseinen ehto siis sanoo, että osien välillä ei vallitse lähipisterelaatioita.

Lukija voi helposti tarkistaa, että kuvan 3 verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko ovat epäyhtenäisiä tämän määritelmän mukaan. (Asian osoittamiseksi valitaan A:ksi ja B:ksi X:n yhtenäiset komponentit.)

Sanomme, että $(X, \bar{\in})$ on *yhtenäinen*, jos se ei ole epäyhtenäinen. Kuvassa 1 esitetyt verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko ovat tämän määritelmän mukaan yhtenäisiä.

7.4 Komponenttien määrä

Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus. Olkoon $A \subset X$. Nyt $(A, \bar{\in}_A)$ on lähipisteavaruus, kun $\bar{\in}_A \subset A \times \mathcal{P}(A)$ määritellään

$$x \bar{\in}_A B \text{ jos ja vain jos } x \bar{\in} B$$

kaikilla $B \subset A, x \in A$. Merkitään A:n sulkeumaoperaattoria cl_A, eli jos $B \subset A$, $\mathrm{cl}_A B$ on kaikkien niiden A:n pisteiden joukko, jotka ovat lähellä joukkoa B.

Ylläolevan määritelmän perusteella mitä tahansa X:n osajoukkoa voidaan käsitellä lähipisteavaruutena, joten minkä tahansa X:n osajoukon yhtenäisyydestä ja epäyhtenäisyydestä voidaan puhua.

Jos $A \subset X$, sanomme, että A on X:n *yhtenäinen komponentti*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. A on yhtenäinen.
2. Jos $B \subset X$ on sellainen, että $A \subset B$, $A \neq B$, niin tällöin B on epäyhtenäinen.

Siis X:n yhtenäiset komponentit ovat X:n maksimaalisia yhtenäisiä osajoukkoja.

Tämän määritelmän nojalla kuvassa 2 on verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko, joilla on kummallakin kolme yhtenäistä komponettia.

Seuraavaksi todistamme kaksi yhtenäisten komponenttien perustulosta. Ensinnäkin sen, että jokainen piste kuuluu johonkin yhtenäiseen komponenttiin sekä sen, että kahden yhtenäisen komponentin leikkaus on tyhjä. Aloitamme kuitenkin kahdella lemmalla, joista ensimmäistä käytämme jatkossa ilman eri viittausta.

Lemma 1 *Olkoon* $(X, \bar{\in})$ *lähipisteavaruus ja* $B \subset X$ *sellainen, että* $\operatorname{cl} B = B$. *Olkoon* $A \subset X$. *Tällöin* $\operatorname{cl}_A(A \cap B) = A \cap B$.

Todistus: Selvästi $A \cap B \subset \operatorname{cl}_A(A \cap B)$ ja $\operatorname{cl}_A(A \cap B) \subset A$. Siis täytyy todistaa $\operatorname{cl}_A(A \cap B) \subset B$.

Lähipisteavaruuden määritelmän ehdosta 3 seuraa, että jos $C \subset D$ niin $\operatorname{cl} C \subset \operatorname{cl} D$. Näin ollen $\operatorname{cl}_A(A \cap B) \subset \operatorname{cl}(A \cap B) \subset \operatorname{cl} B = B$.□

Lemma 2 *Olkoon* $(X, \bar{\in})$ *lähipisteavaruus, ja* $(C_i)_{i \in I}$ *kokoelma* X*:n yhtenäisiä osajoukkoja siten, että on olemassa* $x \in X$, *jolle* $x \in C_i$ *kaikilla* $i \in I$. *Tällöin* $\bigcup C_i$ *on yhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus: $\bigcup C_i$ on epäyhtenäinen. Olkoon A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Symmetrian perusteella voidaan olettaa $x \in A$. Olkoon i sellainen, että $C_i \cap B \neq \emptyset$. Nyt $A \cap C_i$ ja $B \cap C_i$ ovat kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä joukolle C_i, joka on yhtenäinen. Ristiriita.□

Korollaari 3 *Olkoon* $(X, \bar{\in})$ *lähipisteavaruus ja* $x \in X$. *Tällöin* x *kuuluu johonkin* X*:n yhtenäiseen komponenttiin.*

Todistus: Olkoon $(C_i)_{i \in I}$ kaikkien X:n yhtenäisten osajoukkojen kokoelma, jotka sisältävät x:n. Koska x:n yksiö $\{x\}$ on yhtenäinen, kokoelma on epätyhjä. Lemman 2 nojalla $\bigcup C_i$ on maksimaalinen yhtenäinen osajoukko, eli yhtenäinen komponentti.□

Korollaari 4 *Jos* C *ja* D *ovat* X*:n yhtenäisiä komponentteja,* $C \neq D$, *niin* $C \cap D = \emptyset$.

Todistus: Tehdään vastaoletus, $C \cap D \neq \emptyset$. Joko $C \not\subset D$ tai $D \not\subset C$. Oletetaan symmetrian perusteella ensimmäinen. Nyt $C \cup D$ on Lemman 2 nojalla yhtenäinen, joten D ei ole maksimaalinen, eikä näin ollen yhtenäinen komponentti. Ristiriita.□

7.5 Yhtenäiseksi todistaminen

Lähipisteavaruuksia voidaan todistaa epäyhtenäisiksi yksinkertaisesti löytämällä joukot A ja B, jotka ovat kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Yhtenäiseksi todistaminen on usein vaikeampaa, ja tässä luvussa esittelemme pari tulosta, joista yhtenäisyys tietyissä tapauksissa seuraa.

Aluksi esittelemme tuloksen, jonka avulla voidaan osoittaa verkon yhtenäisyys. Olkoon $(X, \bar{\in})$ verkkoa vastaava lähipisteavaruus ja $x \in X$. Merkitään $\operatorname{cl} x = \operatorname{cl}\{x\}$, ja $\operatorname{cl}^n x = \operatorname{cl} \operatorname{cl} \ldots \operatorname{cl} x$, missä sulkeumia otetaan n kappaletta.

Teoreema 5 *Olkoon $(X, \bar{\in})$ verkkoa vastaava lähipisteavaruus ja $x \in X$. Jos on olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolle $\operatorname{cl}^n x = X$, niin X on yhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus: X on epäyhtenäinen. Olkoon A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Symmetrian perusteella voidaan olettaa $x \in A$. Määritellään jokaiselle $y \in X$ arvo $v(y)$ siten, että $v(y)$ on pienin luku m jolla $y \in \operatorname{cl}^m x$ (ja määritellään $v(x) = 0$). Olkoon $z \in B$ piste, jolla on pienin v-arvo joukon B pisteistä. Nyt pisteestä z on särmä johonkin sellaiseen pisteeseen z', jolle $v(z') = v(z) - 1$. Mutta $v(z)$:n mininaalisuuden perusteella $z' \in A$. Siis $z \in \operatorname{cl} A$. Ristiriita.$\square$

Seuraavaksi esittelemme tuloksen, josta seuraa aika monen $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyys. Aloitamme kuitenkin aputuloksilla.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Sanomme, että $x \in \mathbb{R}$ on joukon A yläraja, jos kaikilla $a \in A$ pätee $a \leq x$. Reaaliluvuilla on seuraava käyttökelpoinen ominaisuus: Jos $A \subset \mathbb{R}$ on epätyhjä ja joukolla A on yläraja, tällöin joukon A ylärajojen joukossa on pienin yläraja. Kutsumme joukon A pienintä ylärajaa joukon A *supremumiksi.*

Lemma 6 *Jokainen jana $\mathbb{R}^2$:ssa on yhtenäinen.*

Todistus: Olkoon J jana, jonka päätepisteet ovat x ja y. Kun $t \in [0, 1]$, merkitään $f(t) = ty + (1 - t)x$. Nyt $J = \{f(t) \mid t \in [0, 1]\}$. Tehdään vastaoletus: J on epäyhtenäinen. Olkoon A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Oletetaan symmetrian perusteella, että $x \in A$.

Olkoon t_0 supremum luvuista $t \in [0,1]$, joille jana pisteestä x pisteeseen $f(t)$ sisältyy joukkoon A. Nyt mielivaltaisen lähellä $f(t_0)$:aa on joukon A pisteitä, joten $f(t_0) \in \operatorname{cl} A$, ja koska $A = \operatorname{cl} A$, $f(t_0) \in A$.

Jos $t_0 = 1$, pätee $J = A$ ja $B = \emptyset$, mikä on ristiriita. Siis $t_0 < 1$. Nyt mielivaltaisen lähellä $f(t_0)$:aa on joukon B alkoita, joten $f(t_0) \in \operatorname{cl} B = B$. Siis $f(t_0) \in A \cap B$, ristiriita.□

Olkoon $J_1, \ldots, J_n$ janoja siten, että kaikilla i, $i = 1, \ldots, n-1$, janan J_i loppupiste on janan J_{i+1} alkupiste. Tällöin kutsumme yhdistettä $\bigcup J_i$ *murtoviivaksi.*

Korollaari 7 *Murtoviiva on yhtenäinen.*

Todistus: Yhdestä janasta koostuva murtoviiva on yhtenäinen Lemman 6 perusteella. Useammasta janasta koostuva murtoviiva voidaan näyttää yhtenäiseksi induktiolla käyttäen Lemmaa 2.□

Teoreema 8 *Olkoon $X \subset \mathbb{R}^2$ sellainen, että mitkä tahansa kaksi X:n pistettä voidaan yhdistää murtoviivalla joukon X sisällä. Tällöin X on yhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus: X on epäyhtenäinen. Olkoot A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Valitaan $x \in A$, $y \in B$. Olkoon M murtoviiva pisteestä x pisteeseen y. Mutta nyt $M \cap A$ ja $M \cap B$ ovat kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä joukolle M. Siis M on epäyhtenäinen, mikä on ristiriita edellisen korollaarin kanssa. □

Esimerkki 9 *Olkoon X annulus $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq d(x,0) \leq 2\}$. Nähdään helposti, että mitkä tahansa kaksi X:n pistettä voidaan yhdistää murtoviivalla joukon X sisällä. Siis X on yhtenäinen.*

7.6 Lopuksi

Olkoon X joukko. Sanomme, että $d \colon X \times X \to [0, \infty[$ on metriikka (eli etäisyysfunktio), jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $d(x,y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$.

2. Kaikilla $x, y \in X$ pätee $d(x, y) = d(y, x)$.

3. Kaikilla $x, y, z \in X$ pätee $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$.

Huomataan, että tavallinen etäisyys (linnuntietä) missä tahansa $\mathbb{R}^n$:n osajoukossa on metriikka. Lisäksi missä tahansa metriikalla varustetussa joukossa X voidaan määritellä osajoukkojen lähipisteet samalla tavalla teimme sen $\mathbb{R}^2$:n osajoukoille. Metriikan avulla määritelty $\bar{\in}$ toteuttaa aina, paitsi lähipisteavaruuden aksioomat, myös topologisen avaruuden ehdot

- Kaikilla $A, B \subset X$ ja kaikilla $x \in X$ pätee $x \bar{\in} (A \cup B)$ jos ja vain jos $x \bar{\in} A$ tai $x \bar{\in} B$.

- Kaikilla $A \subset X$ pätee $\operatorname{cl}\operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$.

Tämän tuloksen perusteella saamme suuren joukon topologisia avaruuksia.

Yllä olemme havainneet, että topologisen avaruuden yhtenäisten komponenttien lukumäärä voidaan määritellä kun pelkästään tiedetään kaikkien osajoukkojen lähipisteet. On ehkä hiukan yllättävää, että se voidaan tehdä näin niukkojen tietojen varassa. Itse asiassa näin niukkojen tietojen varassa voidaan määritellä myös topologisen avaruuden reikien lukumäärä ja tyyppi, mutta se kuuluukin sitten algebralliseen topologiaan, jota käsitellään vasta yliopiston kursseilla, ja sielläkin vasta syventävillä vapaaehtoisilla kursseilla.

7.7 Pähkinöitä

1. Osoita, että Teoreemassa 5 annettu ehto (äärellisen) verkon yhtenäisyydelle on *jos ja vain jos* -ehto.

2. Olkoon (X, S) suunnattu verkko. Määritellään lähipisterelaatio $\bar{\in} \subset X \times \mathcal{P}(X)$, $x \bar{\in} A$ jos ja vain jos $x \in A$, tai on olemassa nuoli, jonka alkupiste on A:ssa ja loppupiste on x.

   Määritetään $\operatorname{cl}' \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ siten, että kaikilla $A \subset X$ pätee $\operatorname{cl}' A = A \cup B$, missä B on niiden solmujen s joukko, joille on olemassa $s' \in A$ ja nuoli pisteestä s' pisteeseen s tai nuoli pisteestä s pisteeseen s'.

Olkoon $x \in X$, ja $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\mathrm{cl}'^n x = X$. Osoita, että $(X, \bar{\in})$ on yhtenäinen.

3. Olkoon $X = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Osoita, että X ei ole yhtenäinen.

4. Olkoon $X = \{(q, 0) \mid q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$ Osoita, että X:n yhtenäiset komponentit ovat yhden pisteen kokoisia.

5. Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus ja $C \subset X$ yhtenäinen. Osoita, että $\mathrm{cl}\, C$ on yhtenäinen.

6. Osoita, että Teoreeman 8 ehto $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyydelle ei ole *jos ja vain jos* -ehto. Voit esimerkiksi käyttää edellistä tehtävää hyväksi.

7. Osoita, että on olemassa lähipisteavaruus $(X, \bar{\in})$, joka ei toteuta ehtoa

   - Kaikilla $A, B \subset X$ ja $x \in X$ pätee, että $x \bar{\in} (A \cup B)$ jos ja vain jos $x \bar{\in} A$ tai $x \bar{\in} B$.

7.8 Liite: Pikajohdatus joukko-oppiin

Tässä liitteessä esittelemme joukko-opin notaation.

Joukolla tarkoitamme kokoelmaa alkioita.[3] Jos alkio x kuuluu joukkoon A, merkitsemme $x \in A$. Kaksi joukkoa, A ja B ovat itse asiassa sama joukko, jos niihin kuuluvat samat alkiot. Eli formaalisti, $A = B$, jos

Kaikilla x pätee $x \in A$ jos ja vain jos $x \in B$.

[3] Russellin paradoksin välttämiseksi alkiokokoelmat on jaettava joukkoihin ja aitoihin luokkiin. Tämä aihepiiri on kuitenkin sen verran vaikea, ettemme tässä mene siihen.

Jos A ja B ovat joukkoja ja kaikki A:n alkiot ovat myös B:n alkioita, sanomme, että A on B:n osajoukko, mitä merkitään $A \subset B$. Jos A on joukko, A:n osajoukoiksi lasketaan myös A itse sekä tyhjä joukko $\emptyset$.

Joukkojen A ja B yhdiste $A \cup B$ on joukko, johon kuuluvat kaikki ne alkiot, jotka kuuluvat A:han, B:hen tai molempiin. Joukkojen A ja B leikkaus $A \cap B$ on joukko, johon kuuluvat kaikki ne alkiot, jotka kuuluvat sekä A:han että B:hen.

Jos A on joukko ja P on ominaisuus, $\{a \in A \mid P(a)\}$ on joukko, johon kuuluvat ne A:n alkiot, joilla on ominaisuus P. Jos P on ominaisuus, $\{a \mid P(a)\}$ on joukko, johon kuuluvat ne matemaattiset oliot, joilla on ominaisuus P. Äärellinen joukko voidaan kirjoittaa myös luettelemalla sen alkiot, eli $\{x_1, \ldots, x_n\}$ on joukko, jonka alkiot ovat $x_1, \ldots, x_n$.

Jos a, b ovat mitä tahansa matemaattisia olioita, voidaan muodostaa järjestetty pari (a, b). Jos $a \neq b$, niin $(a, b) \neq (b, a)$, eli tässä alkioiden järjestyksellä on väliä. Kaksi järjestettyä paria (a, b), (c, d) ovat samat, $(a, b) = (c, d)$, jos ja vain jos $a = c$ ja $b = d$.

Jos A ja B ovat joukkoja, niiden karteesinen tulo $A \times B$ on joukko, johon kuuluvat kaikki järjestetyt parit (a, b), missä $a \in A$ ja $b \in B$. Joukon $A \times B$ osajoukkoja R kutsutaan relaatioiksi joukkojen A ja B välillä. Jos R on relaatio ja $(a, b) \in R$, merkitään aRb.

Relaatio R joukkojen A ja B välillä on funktio, jos jokaisella $a \in A$ on olemassa täsmälleen yksi $b \in B$, jolle aRb. Tällöin merkitään $R\colon A \to B$. Jos R on funktio ja aRb, merkitään $R(a) = b$.

Olkoon I joukko. Oletetaan, että jokaiseen $i \in I$ on liitetty matemaattinen olio C_i. Tällöin kaikkien C_i:den muodostamaa kokonaisuutta merkitään $(C_i)_{i \in I}$ ja kutsutaan indeksoiduksi kokoelmaksi. Jos edellä C_i:t ovat joukkoja, $\bigcup C_i$ tarkoittaa joukkoa, joka on joukkojen C_i yhdiste, eli $x \in \bigcup C_i$ jos ja vain jos $x \in C_i$ jollain $i \in I$.

Tasoa merkitään $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, koska tason pisteet ovat koordinaattipareja.

Kirjallisuutta

[1] Väänänen, Jouko, *Matemaattinen logiikka*, luentomoniste

[2] Wikipedia, *Halting problem*

[3] Browne, Cameron, *Hex Strategy: Making the Right Connections*, A K Peters Ltd, 2000.

[4] Čech, Eduard, *Topological Spaces*, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, and Interscience Publishers, a Division of John Willen and Sons, London, New York, Sydney, 1966