Matematiikasta (lähes) yleistajuisesti

Tuomas Korppi

8. toukokuuta 2019

Sisältö

Osa I

Aluksi

Luku 1

Johdanto

Tässä on kirjoituksiani matematiikasta. Kirjoitukset on suunnattu yleisölle, joka ei ole matemaatikoita, mutta esitietoina oletetaan hyvin hallittu lukion pitkä matematiikka.

Olen itse suuntautunut sellaisille matematiikan aloille, joissa numeroita esiintyy suhteellisen vähän. Vahvat alani ovat topologia, joka on eräänlaista geometriaa ja logiikka, jossa tutkitaan eräänlaisten keinotekoisten kielten ilmaisuvoimaa. Tämä heijastuu myös tämän kirjan aihevalintoihin, numeroita kirjoituksissani näkyy suhteellisen vähän. Olen aina ollut sitä mieltä, että päätteleminen on hauskempaa kuin laskeminen, enkä tässäkään kirjassa juurikaan käsittele sellaisia matematiikan osa-alueita, joilla joutuu laskemaan.

Kirja alkaa poleemisella tekstillä, jossa esitän oman näkemykseni matematiikasta. Tätä seuraa artikkeleja eri matematiikan osa-alueilta, järjestettynä suunnilleen helpoimmasta vaikeimpaan. Lopussa on vielä itseopiskelumateriaali jatkuvuuden käsitteestä. Itseopiskelumateriaalin pitäisi olla ymmärretävä lukion ensimmäisen vuoden matematiikan jälkeen.

Tekstit ”Heittäydytäänpä filosofisiksi” -tekstiä lukuunottamatta on aiemmin julkaistu Matematiikkalehti Solmussa.

Luku 2

Väitteitä matematiikan opetuksesta ja vastauksia niihin

Maallikoilla on mitä kummallisimpia näkemyksiä matematiikasta, ja nämä näkemykset heijastuvat siihen, millaisena he näkevät matematiikan kouluopetuksen[1] roolin. Tässä kirjoitelmassa esitän tällaisia näkemyksiä väitemuodossa ja annan oman vastaukseni väitteisiin. Vaikka väitteiden muotoilu on minun tekemäni, kaikilla esitetyillä väitteillä on esikuvansa todellisuudessa.

2.1 Matematiikan luonne

Väite 1 *Matematiikkahan on pelkästään joukko sopimuksia.*

Vastaus: Kaikilla tieteenaloilla on omaa erikoisterminologiaansa, ja termien merkitykset voidaan nähdä sopimuksina. Matematiikka ei

[1] Koululla tarkoitan tässä kirjoitelmassa peruskoulua ja lukiota.

ole mikään poikkeus, ja matemaatikkojen ammattikielessä tällaista termin merkityksen määrittelyä kutsutaan *määritelmäksi*.

Määritelmät itsessään eivät ole matematiikassa se asian pihvi, vaan se, että niistä voidaan loogisesti päätellä uusia väittämiä, joita kutsutaan *teoreemoiksi*. Päättelyketjut ovat useissa tapauksissa hyvinkin monipolvisia, ja se, että jokin teoreema on määritelmien looginen seuraus, voi olla päättelyketjua tuntemattomalle ihmiselle (jopa matemaatikolle) hyvinkin yllättävää.

Muista tieteistä matematiikka eroaa siten, että muissa tieteissä tulokset eivät ole pelkästään termien merkitysmäärittelyjen loogisia seurauksia, vaan muissa tieteissä tulokset riippuvat sekä termien merkityksistä että ympäröivän todellisuuden luonteesta.

Matematiikan varsinaisesti mielenkiintoisen sisällön voidaankin katsoa muodostuvan lauseista tyyppiä ”Näistä-ja-näistä määritelmistä seuraavat nämä-ja-nämä teoreemat”. Tällaisten lauseiden totuus tai epätotuus ei sitten enää olekaan sopimuksenvarainen asia vaan looginen välttämättömyys.

2.2 Matematiikka suhteessa muihin kouluaineisiin

Väite 2 *Koulun on tarkoitus tarjota yleissivistystä eikä keskittyä insinöörien tuotantoon talouselämän palvelukseen. Näin ollen matematiikkaa ei tule painottaa.*

Vastaus: Matematiikassa on osia, jotka kuuluvat yleissivistykseen. Tällaista on esimerkiksi ala-asteella opittava peruslaskento, joka jokaisen länsimaisen ihmisen kuuluu osata. Kirjainalgebrasta yleissivistykseen kuuluu ainakin sen ymmärtäminen, kuinka kirjainten avulla voidaan esittää yleisiä, kaikkia lukuja koskevia väitteitä. Tämä on yleissivistävää, koska se esittää oppilaille uuden tavan ilmaista asioita.

Yleissivistävää materiaalia löytyy myös nykyisen koulukurssin ulkopuolelta. Tärkeimpänä tällaisena asiana pidän deduktiivisen metodin hallintaa, jossa lähdetään aksioomista, ja niistä käsin todistetaan, eli perustellaan aukottomasti teoreemoja. Tämä on yleissivistävää siksi, että tällaisessa ympäristössä tutustutaan siihen, millaista on tieto, joka voidaan tietää varmasti, ja joka eroaa empiirisissä tieteissä saavutettavasta tiedosta, joka on epävarmaa.

Deduktiivinen metodi, Eukleideen geometriana, on myös kuulunut klassiseen yleissivistykseen.

Myös modernimmassa matematiikassa on osia, joiden hallinta on mielestäni yleissivistävää. Tällaisia ovat ainakin seuraavat:

- $\delta - \varepsilon$ -metodi, jolla jatkuvaa muutosta voidaan käsitellä matemaattisen täsmällisesti.

- Kardinaalilukujen teorian alkeita sen verran, että ymmärretään, että parhaiden matemaattisten teorioiden mukaan äärettömiä joukkoja on eri kokoisia.

- Lebesguen mitan teoria, joka kertoo, kuinka omituisen mallisiin joukkoihin käsitteitä ”pituus”, ”pinta-ala” ja ”tilavuus” voidaan mielekkäästi soveltaa.

- Sen ymmärtäminen, mitä Gödelin epätäydellisyyslauseet sanovat. Tämä kertoo matemaattisen metodin rajat. Lisäksi nämä lauseet osoittavat, että totuus transsendenttina ominaisuutena on erotettava todistuvuudesta inhimillisesti saavutettavissa olevana ominaisuutena. Monissa maallikoiden käymissä filosofisissa keskusteluissa olen huomannut, että ihmisillä on mitä kummallisimpia harhaluuloja koskien Gödelin epätäydellisyyslauseita.

Yllä olen esimerkinomaisesti luetellut matematiikan osia, jotka ovat yleissivistäviä. Luetteloa ei ole tarkoitettu kattavaksi; yleissivistävää materiaalia löytyy varmasti lisääkin. Näin ollen kouluopetuksen muuttaminen yleissivistävämmäksi ei tarkoita matematiikan osalta sitä, että sen määrää vähennettäisiin, vaan ennemmin sitä, että painopistettä siirretään matematiikan sisällä insinöörien tarvitsemasta "välinematematiikasta" kohti käsitteellisesti mielenkiintoista matematiikkaa.

Väite 3 *Matematiikka ja kovat luonnontieteet edustavat kovia arvoja. Kouluopetuksen on sitä vastoin painotettava pehmeitä arvoja.*

Vastaus: Ensinnäkin tekisi mieli muistuttaa Humen giljotiinista. Matematiikka ja luonnontieteet tuottavat tietoa siitä, kuinka asiat ovat, eivätkä ne suoranaisesti kerro siitä, kuinka asioiden pitäisi olla. Näin ollen ne ovat neutraaleja arvokeskustelussa.

Kovia arvoja edustaakin nähdäkseni lähinnä rahan ja yleisemmin talouden roolin painottaminen päätöksenteossa, eikä matematiikka sinällään sano juuta eikä jaata koskien sitä, pitäisikö näitä asioita painottaa.

Taloustieteen teorioissa toki sovelletaan matematiikkaa, ja jotta ihminen voisi uskottavasti argumentoida kovia taloudellisia arvoja kannattavia ihmisiä vastaan, hänen täytyy hallita talouden lainalaisuudet, ja näin ollen myös matematiikkaa. Näin matematiikka on, hiukan kiertotietä, hyödyllistä myös ihmiselle, joka haluaa edesauttaa pehmeiden arvojen toteutumista.

Väite 4 *Koulun on opetettava kriittistä ajattelua, ja sitä tukevat parhaiten humanistiset aineet, ei matematiikka.*

Vastaus: Ensinnäkin kouluopetuksessa on sellainen ongelma, että tieteiden metodologiaan ei yleensä päästä, mikä rajoittaa kriittisen ajattelun opettamista ylipäätänsä, koska oppilaat eivät näe, millaisia ovat ne ajattelutavat, joita tiedon keräämisessä käytetään. Myös humanistisissa aineissa "kriittinen ajattelu" jää koulussa usein mielipiteiden ilmaisemisen tasolle.

Matemaattinen metodi, deduktiivinen päättely, on periaatteessa opetettavissa jo lukiotasolla (katso vastaus Väitteeseen 2). Tämä edesauttaa kriittisen ajattelun valmiuksia, koska oppilaat tutustuvat päättelyketjuihin, jotka ovat tiukasti totuuden säilyttäviä. Tämä auttaa hahmottamaan hyvän ja huonon päättelyn eroa.

On tietysti totta, että kriittinen ajattelu on paljon muutakin kuin deduktiivista päättelyä, mutta väitän, että humanististen tieteiden summittaisella painottamisella matematiikkaan verrattuna tavoitetta ei saavuteta. Eräs mahdollisuus kriittisen ajattelun opettamiseen olisi matemaattisen deduktion opettaminen, ja sen lisäksi väittelytaidon kurssi, jolla keskityttäisiin argumentaatiovirheiden karsimiseen. Argumentaatiovirheet kun ovat yleensä seurausta ajatusvirheistä.

2.3 Matemaattisista ajatusprosesseista

Väite 5 *Koulun tulee opettaa luovuutta, ja koska matematiikka ei ole luovaa, sitä ei tule painottaa.*

Vastaus: Koulumatematiikassa hinkataan hyvin paljon mekaanisia laskutehtäviä, mikä tosiaan ei ole luovaa. Yliopistomatematiikassa tilanne on toinen. Siellä törmätään ongelmiin, jotka toteuttavat molemmat seuraavista ehdoista:

1. Ongelman ratkaisun oikeellisuuden tarkastaminen on mekaaninen toimenpide.
2. Ongelman ratkaisun löytämiseen ei ole mekaanista menetelmää.

Tällaisissa olosuhteissa törmätään aivan omanlaiseensa luovuuden lajiin. Kohdan (2) takia luovuutta tosiaan tarvitaan: Valmiin ratkaisukonseptin mekaaninen soveltaminen ei ole mahdollista. Kohdan (1) takia kenenkään ei ole mahdollista tarjota epäkelpoa ratkaisua ja väittää, että sen hyvyys on mielipidekysymys.

Tällainen luovuus eroaa jonkun verran siitä luovuudesta, jota esimerkiksi kuvataiteilija käyttää, koska esimerkiksi tehtävänannon "luova tulkitseminen" ei ole sallittua. Toisaalta tällainen luovuus tulee lähelle runoilijan luovuutta silloin kun runoilija kirjoittaa runoa johonkin mittaan: Mitta asettaa reunaehdot runon rytmille ja loppusoinnuille samaan tapaan kuin matematiikan oikeellisuuden säännöt asettavat reunaehdot matemattisen tehtävän ratkaisulle. Nähdäkseni mittaan kirjoittava runoilija tarvitsee vapaaseen mittaan kirjoittavaan verrattuna huomattavasti enemmän luovuutta, koska hänen on löydettävä sanat, jotka *sekä* sopivat mittaan *että* välittävät sen, mitä hän haluaa sanoa.

Uskoisin, että elävässä elämässä tarvitsemme enemmän matemaatikon luovuutta kuin kuvataiteilijan luovuutta, koska todellisuus asettaa selkeitä rajoja ratkaisujen hyvyydelle.

Näin ollen olenkin vahvasti sitä mieltä, että matematiikan kouluopetukseen olisi tuotava mahdollisuuksien mukaan tehtäviä, jotka toteuttavat ehdot (1) ja (2). Eräs tehtävätyyppi, jossa tähän törmätään ilman, että vaaditaan syvällistä matematiikan teorioiden tuntemusta, ovat tehtävät, joissa etsitään voittostrategioita yksinkertaisiin peleihin.

Väite 6 *Matemaatikot pelkästään tuijottavat kaavoihinsa. Haluamme, että koulussa ihmisille opetetaan laaja-alaisempaa ymmärryskykyä.*

Vastaus: Kuten edellä on tullut ilmi, matematiikka on päättelyä ja ongelmanratkaisua, ja kaavat ovat vain kieli matemaattisten asioiden esittämiseen. Itse asiassa matemaattisessa tekstissä yleensä vaihdellaan luonnollisen kielen ja kaavojen välillä aina sen mukaan, kummalla on esitettävä asia helpompi ilmaista.

Matemaattisen ymmärryskyvyn omaavat ihmiset yleensä myös ymmärtävät, mistä kaavat tulevat, mikä on ainoa tapa hahmottaa jonkun kaavan sovellusalueen rajat tai kysymys kaavan pätevyydestä ylipäätänsä. Kritiikitön kaavan soveltaminen on yleensä merkki matemaattisen ymmärryskyvyn puutteesta, ja eräs matematiikan opettamisen syistä onkin antaa ihmisille ymmärrys, jolla punnita kaavoja tai matematiikkaan pohjaavia väitteitä ylipäätänsä.

2.4 Matematiikan käytännön hyöty

Väite 7 *Koulujen matematiikan opetuksessa on siirryttävä soveltaviin tehtäviin.*

Vastaus: Tässä sana "soveltava" on aika monitulkintainen. Ensinnäkin sillä voidaan tarkoittaa sovelluksia käytännön elämään. Toisekseen sillä voidaan tarkoittaa esitetyn matemaattisen teorian soveltamista uusiin matemaattisiin ongelmiin, joilla ei välttämättä ole yhteyttä käytännön elämään.

Mielestäni käytäntöön soveltaminen ei saa olla oppisisältöjen valinnassa itseisarvo. Tärkeää on se, että oppilaat oppivat matemaattista teorianmuodostusta sekä luovaa matemaattista ongelmanratkaisukykyä, eli yhteenvetona matemaattista ajattelua. Käytäntöön soveltavia ongelmia kannattaa esittää vain sikäli, kun se palvelee tätä tarkoitusta. Erityisesti sellaisia soveltavia tehtäviä on vältettävä, joissa tehdään vain mekaaninen, suoraviivainen sovellutus esitetystä teoriasta.

Soveltaminen uusiin matemaattisiin ongelmiin on selkeämmin kannatettavaa. Tällaiset tehtävät ovat hyvin usein niitä, joissa sovellus ei ole suoraviivainen, vaan vaatii kekseliäisyyttä, eli yleensä toteuttaa Väitteen 5 vastauksessa mainitut pykälät (1) ja (2).

Väite 8 *Matematiikan opettaminen koulussa on turhaa. En ole eläessäni tarvinnut derivaattaa mihinkään.*

Vastaus: Ensinnäkin on kohtuutonta yleistää derivaatan tarpeettomuus koko matematiikan tarpeettomuudeksi. Esimerkiksi ala-asteella opetettavia peruslaskutoimituksia jokainen tarvitsee arkipäiväisessä elämässään.

Lisäksi differentiaali- ja integraalilaskenta, johon derivaattakin kuuluu, on välttämätöntä luonnontieteisiin ja tekniikkaan jatko-opinnoissa suuntautuville oppilaille, ja koulun on annettava valmiudet myös heille. Tässä merkittävä on lukion matematiikan jako pitkään ja lyhyeen matematiikkaan. Ne jotka aikovat jatkossa suuntautua luonnontieteisiin ja tekniikkaan, voivat lukiossa valita pitkän matematiikan.

Kuitenkin suuri osa koulussa opetettavasta asiasta muissakin aineissa on sellaista, jota ei jatkossa konkreettisesti tarvita, mutta jonka hallitsemisen katsotaan olevan arvokasta yleissivistystä. Siitä, mikä osa matematiikasta on mielestäni tällaista, olen kirjoittanut Väitteen 2 vastauksessa.

On totta, että en katso derivaatan kuuluvan matemaattiseen perusyleissivistykseen. Sitä vastoin differentiaali- ja integraalilaskentaa tarvitaan hyvinkin yksinkertaisen fysiikan ymmärtämisessä. Esimerkiksi nopeus on kuljetun matkan derivaatta ajan suhteen. Mielestäni tietty määrä fysiikkaa, ympäröivän todellisuuden perimmäisten lainalaisuuksien tutkimisena, kuuluu yleissivistykseen jos mikä. Näin derivaattakin kuuluu yleissivistykseen, ei osana matemaattista yleissivistystä vaan osana fysikaalista yleissivistystä.

2.5 Liite: Aksioomien ja määritelmien suhteesta

Kysymyksen 1 vastauksessa puhun siitä, että teoreemat seuraavat määritelmistä. Koska joillekin koelukijoilleni heräsi kysymys, eikö aksioomia tarvita myös, selvennän tässä liitteessä kantaani.

Tässä kannattaa huomata aksiooman roolin muuttuminen antiikista nykyaikaan. Aiemmin aksioomia pidettiin itsestäänselvyyksinä, jotka eivät tarvinneet perustelua, ja joita siksi voitiin pitää päättelyn lähtökohtana.

Nykyisin aksioomiin ei liity tuollaista itsestäänselvyyden vaatimusta, ja ne esiintyvät osana määritelmiä. Esimerkiksi topologinen avaruus määritellään miksi tahansa systeemiksi, joka toteuttaa topologisen avaruuden aksioomat. Ryhmät määritellään samalla tavoin aksiomaattisesti. Itse yleistäisin vielä tästä, ja pitäisin esimerkiksi 2. kertaluvun Peanon aksioomia luonnollisten lukujen systeemin määritelmänä: Määrittelen luonnollisten lukujen systeemin siksi isomorfiaa vaille yksikäsitteiseksi systeemiksi, joka toteuttaa 2. kertaluvun Peanon aksioomat. Reaaliluvut määrittelen vastaavasti.

Tällä lähestymistavalla tarvitsemme matematiikan lähtökohdaksi kolme asiaa:

1. Määritelmät
2. Päättelysäännöt
3. Matemaattisen konstruoimisen säännöt

Kohdan 1 vastauksessa tarkoitukseni oli käyttää sanaa "looginen" löyhässä mielessä niin, että se kattaa pykälät (2) ja (3). Jos ollaan tarkkoja, ylläoleva lista tarkentuu muotoon

1. Määritelmät
2. 1. kertaluvun predikaattilogiikka
3. ZFC-joukko-opin aksioomat

Näin ZFC-joukko-opin aksioomat (tai, jos niin halutaan, joku niiden vahvennus, jossa voidaan puhua myös aidoista luokista) ovat ainoa aksioomien muoto, jotka ovat aksioomia vanhassa, antiikinaikaisessa mielessä. Puolustan kuitenkin niiden sisällyttämistä "logiikkaan" vastauksessani sillä, että suuri osa matemaatikoista ei edes tunne kyseisiä aksioomia perusteellisesti, vaan suorittavat matemaattiset konstruktiot itsestäänselvänä pitämällään tavalla, joka yhtyy ZFC:ssä sallittuihin operaatioihin.

Osa II

Artikkelit

Luku 3

Suklaa, kauneus ja matematiikka

Ratkaisun löytäminen matemaattiseen probleemaan ei ole useinkaan helppoa. Tässä tekstissä kuvailen ajatusprosessin, jonka jouduin käymään läpi saadakseni ratkaistua Tommi Sottisen minulle esittämän kysymyksen.

Oletetaan, että meillä on $k \times \ell = n$ palan suklaalevy, joka pitäisi pilkkoa yhden palan kokoisiksi osiksi. Käytämme seuraavaa menetelmää:

Katkaisemme levyn palojen välistä (suoraviivaista) jakoviivaa pitkin, ja saamme kaksi osaa. Sen jälkeen valitsemme jonkun osan, ja katkaisemme sen palojen välistä jakoviivaa pitkin. Toistamme tätä osan valitsemista ja sen halkaisemista, kunnes suklaa on täysin pilkottu.

Ylläesitetty pilkkomissysteemi jättää kuitenkin pilkkojalle valinnanvaraa. Hän voi esimerkiksi aloittaa halkaisemalla levyn joko pitkittäis- tai poikittaissuunnassa. Hän voi myös halkaista levyn keskeltä tai katkaista pelkästään yhden rivin levyn päästä. Pilkkoja on laiska, ja niinpä hän haluaisi saada levyn yhden palan kokoisiin osiin mahdollisimman vähällä työllä. Kuinkahan hänen kannattaisi käyttää pilkkomissysteemin jättämä valinnanvara?

> **Kysymys:** Kuinka pilkkomiskohdat kannattaisi valita, että suklaalevy saataisiin yhden palan kokoisiksi osiksi mahdollisimman vähillä pilkkomisilla? Kuinka monta pilkkomista tällöin tarvitaan?

Tietokoneohjelmoinnin matemaattisessa tarkastelussa törmätään usein ylläesitetyn kysymyksen kaltaisiin probleemoihin. Tietokone pitäisi saada ratkaisemaan haluttu ongelma mahdollisimman vähillä laskenta-askeleilla, ja usein käy niin, että ensiksi mieleen tuleva tapa ei ole nopein mahdollinen.

Tarkastellaan esimerkiksi listaa, jossa on n lukua suuruusjärjestyksessä, ja tietokone pitäisi ohjelmoida vastaamaan kysymykseen "onko luku k listassa?" Voimme esimerkiksi kirjoittaa ohjelman, joka käy listan läpi alusta loppuun, ja jokaisen listan alkion kohdalla tarkastaa, onko kyseinen listan alkio k. Ohjelma toimii, mutta se joutuu tekemään pahimmillaan n askelta, yhden jokaista listan alkiota kohti.

Parempi tapa ratkaista ongelma onkin seuraava: Tarkastellaan ensin listan keskimmäistä alkiota[1]. Jos se on k, on ongelma ratkaistu. Jos se on suurempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään listan alkupuolta. Jos se on pienempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään listan loppupuolta. Seuraavaksi otetaan edellä valittu listan puolikas, ja sen keskimmäinen alkio. Jos se on k, on ongelma ratkaistu. Jos se on suurempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään valitun listanpuolikkaan alkupuolta. Jos se on pienempi kuin k, tarkastellaan jatkossa pelkästään valitun listanpuolikkaan loppupuolta. Toistetaan sama valitulle listan neljäsosalle, sitten kahdeksasosalle, ja niin edelleen, kunnes k on löytynyt, tai valittu listan

[1] Jos listassa on pariton määrä alkioita, on listassa yksikäsitteinen keskimmäinen alkio. Mikäli listassa on parillinen määrä alkioita, valitaan jompi kumpi kahdesta keskimmäisestä alkiosta. Menetelmän toimivuuden kannalta on yhdentekevää, kumpi valitaan.

osa on huvennut tyhjiin (jolloin k ei ole listassa). Tällä menetelmällä vaaditaan enimmillään noin $\log_2 n$ laskenta-askelta: Jos listan pituus on esimerkiksi 65536 alkiota, askeleita on enimmillään vain 16, eli systeemi on huomattavan nopea.

Suklaalevyä voidaan puolitella hiukan samaan tapaan kuin taulukkoa yllä, joten matemaattisesti koulittu henkilö muodostaa lähes alitajuisesti seuraavan konjektuurin:

> Hyvällä taktiikalla vaadittu pilkkomisten määrä on jotakuinkin $\log_2 n$.

Havaitaan myös, että saman kokoisia, mutta eri muotoisia levyjä voidaan pilkkoa eri tavalla. 4×1-levystä voidaan ottaa yksi pala erilleen, mutta 2×2-levystä täytyy lohkaista kaksi palaa kerralla. Niinpä muodostamme seuraavan konjektuurin:

> Suklaalevyn muoto eli "geometria" vaikuttaa vaadittujen lohkomisten määrään.

Tämä on täysin normaali menetelmä probleemoja ratkaistessa: Ensin arvataan väittämiä, ja sitten yritetään todistaa ne. Tässä tapauksessa sankarimme ei kuitenkaan keksi, kuinka näitä konjektuureja voisi lähteä todistamaan.

Kun lennokkaat ideat eivät toimi, on aika palata maan tasalle. Otamme siis pieniä levyjä, ja tapaus tapaukselta katsomme läpi, kuinka monta pilkkomista ne vaativat. Tarkoituksena on nähdä, josko levyn koon/muodon ja vaaditun pilkkomisten määrän välille löytyisi jokin yhteys.

- 1×1-levy? Se on jo valmiiksi yhden palan kokoinen. Siis 0 pilkkomista.
- 2×1-levy? Sen voi pilkkoa vain yhdellä tavalla. Siis 1 pilkkominen.
- 2×2-levy? Ainoa tapa on pilkkoa ensin kahdeksi 2×1-levyksi, jotka pilkotaan sitten yhden palan kokoisiksi. Siis 3 pilkkomista.

- 4×1-levy? Nyt voidaan pilkkoa kahdella tavalla. Ensimmäinen vaihtoehto on pilkkoa ensin kahdeksi 2×1-levyksi, jolloin tilanne on sama kuin edellisessä tapauksessa. Toinen vaihtoehto on irroittaa ensin yksi pala, sitten yksi pala lisää, ja lopuksi halkaista 2×1-levy kahtia. Siis 3 pilkkomista kummallakin tavalla.

- 3×2-levy? Edelleen kaksi tapaa pilkkoa. Joko ensin kahdeksi 3×1-levyksi, jotka paloiksi, tai ensin kolmeksi 2×1-levyksi, jotka paloiksi. Molemmilla tavoilla 5 pilkkomista.

Kaikissa yllämainituissa tilanteissa kävi niin, että n palan levyn paloittelu vaati $n-1$ pilkkomista riippumatta levyn geometriasta tai valitusta pilkkomistaktiikasta. Tässä vaiheessa heitämmekin edelliset konjektuurit romukoppaan, ja yritämme todistaa uutta konjektuuria:

> Kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee, että n palan levyn paloittelu vaatii $n-1$ pilkkomista riippumatta levyn geometriasta tai valitusta pilkkomistaktiikasta.

Todistettaessa väittämiä kaikille luonnollisille luvuille kannattaa käyttää induktiota:

- *$n = 1$:* 1×1-levyn paloitteluun tarvitaan 0 pilkkomista. Siis väite pätee tässä tapauksessa.

- *$n > 1$ mielivaltainen, väite pätee kaikille luvuille m, jotka ovat pienempiä kuin n:* n palan kokoinen levy pilkotaan ensin kahteen osaan (1 pilkkominen!), kooltaan m, m'. Sitten m ja m' palan kokoiset osat pilkotaan yhden palan kokoisiksi. Tämä vaatii $m-1$ ja $m'-1$ pilkkomista induktio-oletuksen nojalla (ja on riippumaton pilkkomistaktiikasta). Yhteensä siis tehdään $(m-1)+(m'-1)+1 = m+m'-1 = n-1$ pilkkomista. Induktio valmis.

Nyt olemme todistaneet konjektuurimme. Induktiotodistuksissa on yleensä yksi ikävä piirre. Ne kertovat meille, *että* väite pätee, mutta ne eivät kerro meille, *miksi* se pätee. Löytyisiköhän konjektuurillemme toinen todistus, joka auttaisi meitä hahmottamaan tilanteen paremmin?

n palan kokoisen levyn paloitteleminen vaatii $n-1$ pilkkomista. Olisikohan prosessin vaiheilla jokin sellainen ominaisuus, joka kasvaa pilkkomisen myötä? Siis niin, että alussa tuo ominaisuus olisi yksi, yhden pilkkomisen jälkeen kaksi, kahden pilkkomisen jälkeen kolme ja niin edelleen, ja kokonaan paloitellulla levyllä n?

Tässä vaiheessa ratkaisija lyö otsaansa. Tällainen ominaisuus on tietysti olemassa, nimittäin suklaapalasten määrä!

Niinpä saamme konjektuurillemme seuraavan todistuksen:

> Alussa suklaa on yhdessä klöntissä, ja haluttua lopputilaa luonnehtii se, että suklaa on n osassa. Jokainen pilkkominen kasvattaa osien määrää yhdellä (riippumatta valitusta pilkkomistaktiikasta), joten n osaan pääseminen vaatii $n-1$ pilkkomista.

Matematiikassa on kauneutta. Matemaattinen kauneus ei kuitenkaan synny kauniista käsialasta tai sulavasti piirretyistä summamerkeistä, vaan se on ennemmin samaa lajia kuin hyvän vitsin aiheuttama esteettinen mielihyvä: Tilanne ratkeaa, kun se nähdään uudessa, yllättävässä valossa.

Epilogi: Tässä tapauksessa osoittautui, että vaadittu pilkkomisten määrä ei ollutkaan suklaalevyn koon logaritmi, vaikka aluksi niin yritinkin osoittaa. Pilkkomisongelman kysymyksenasettelua voidaan kuitenkin muuttaa niin, että "pilkkomisten määrä on jotakuinkin suklaalevyn koon logaritmi" on oikea vastaus. Keksiikö lukija, millaisia operaatioita suklaalevyn pilkkojalle pitäisi sallia, että hän saisi suklaan pilkottua yhden palan kokoisiin osiin ajassa, joka on jotakuinkin logaritmi levyn koosta? Millaisilla levyillä pilkkomisten määrä on tarkalleen $\log_2 n$?

Luku 4

Mitä ei voida laskea?

Matemaatikkoja kuulee usein syytettävän siitä, että he olettavat, että mitä tahansa voidaan laskea. Perusteluna sille, että kaikkea ei voida laskea, tarjotaan usein rakkauden määrää tai jotain vastaavaa, joka on niin epämääräistä, että matemaattiset metodit eivät pure siihen.

Todellisuudessa matemaatikot eivät oleta, että mitä tahansa voidaan laskea. He nimittäin tietävät, että *matematiikan sisältä* löytyy asioita, jotka ovat eksaktisti määriteltyjä, mutta niin monimutkaisia, että mikään laskentamenetelmä ei tepsi niihin. Tässä kirjoitelmassa tutustumme pariin tällaiseen kysymykseen.

Korostan vielä, että esitämme tässä kirjoitelmassa kysymyksiä, joista voidaan todistaa, että niiden vastauksia ei edes periaatteessa voida laskea. Tässä siis laskemattomuus ei johdu siitä, että laskentamenetelmiä ei ole vielä keksitty.

4.1 Mitä tarkoitamme laskemisella?

Tarkoitamme laskennalla prosessia, jonka lähtökohta on *syöte*, jokin (jossain ennaltamäärätyssä äärellisessä aakkostossa annettu) äärellinen merkkijono, ja joka päättyy *tulokseen*, joka on samoin äärellinen merkkijono. Laskenta voi koostua useista välivaiheista, mutta oletamme, että laskennalla on jotkin säännöt, jotka määräävät yksikäsitteisesti kussakin kohdassa, kuinka laskentaa jatketaan. Tämä siis tarkoittaa, että säännöt eivät missään kohdassa anna laskijalle valinnanvaraa jatkon suhteen.

Laskettaessa esimerkiksi kynällä ja paperilla käytettävissä oleva aika ja paperin määrä määräävät, kuinka pitkä laskenta voi olla. Teoreettisessa laskennan käsitteessämme emme tee tällaista rajoitetta, vaan laskenta saa olla vaikka kuinka pitkä, kunhan se on äärellinen. Samoin syöte ja tulos saavat olla kuinka pitkiä tahansa, kunhan ne ovat äärellisiä.

Edellä puhuimme kynällä ja paperilla laskemisesta, mutta yleisemmin laskemme tietokoneella. Tämän johdosta kutsummekin niitä sääntöjä, joilla laskenta etenee, *tietokoneohjelmaksi.* Tässä siis hyväksymme tietokoneohjelmaksi minkä tahansa tavallisen tietokoneohjelman, joka saa aluksi yhden syötteen[1], prosessoi sitä ja palauttaa lopuksi laskennan tuloksen. Ainoa ero tavallisiin tietokoneohjelmiin on se, että oletamme tietokoneessa olevan muistia rajattomasti, eli niin paljon kuin on tarpeen. Laskenta voi myös kestää niin pitkään kuin on tarpeen, vaikka tarvittava aikamäärä olisikin epärealistisen pitkä.

Lukijalle kenties heräsi kysymys, että millä ohjelmointikielellä oletamme ohjelmamme olevan kirjoitettu. Tässä vastaus on: Sillä ei ole merkitystä. Käytännössä kaikki käytössä olevat ohjelmointikielet ovat yhtä vahvoja, eli niillä voidaan toteuttaa samat laskennat. Kun siis puhumme tietokoneohjelmasta, lukija voi vapaasti ajatella sen olevan kirjoitettu hänelle tutuimmalla kielellään, esimerkiksi C:llä, C++:lla tai Javalla. Myös kynällä ja paperilla (kunhan sitä on rajattomasti) voidaan teoriassa toteuttaa täsmälleen samat laskennat kuin ohjelmointikielillä - joskin se on käytännössä huomattavasti työläämpää.

[1] Tässä siis syöte on yksi merkkijono. Yhteen merkkijonoon voi koodata vaikka kuinka paljon tietoa, esimerkiksi useita lukuja vaikkapa puolipisteellä erotettuna

Teemme vielä yhden lievennyksen edelläesitettyyn laskennan käsitteeseen. Sallimme tietokoneohjelmiksi myös sellaiset tietokoneohjelmat, jotka eivät kaikilla syötteillä palauta tulosta, vaan jotka voivat joillan syötteillä "jäädä jumiin", eli joillain syötteillä laskenta jatkuu ikuisesti eikä tulosta anneta[2][3]. Jos ohjelma antaa tuloksen jollain syötteellä x, sanomme, että ohjelma *pysähtyy* syötteellä x.

4.2 Pysähtymisongelma

Valitaan aluksi ohjelmointikieli. Oletamme, että kaikki tässä luvussa mainitut tietokoneohjelmat on kirjoitettu tällä kielellä. Tutkitaan seuraavaa kysymystä:

> On annettu tietokoneohjelma T ja syöte x. Pysähtyykö ohjelma T syötteellä x?

Meitä kiinnostaa se, voidaanko muodostaa tietokoneohjelma T_0, joka vastaa tähän kysymykseen kaikken parien T, x osalta. Tällainen ohjelma siis saisi syötteenään parin T, x, ja palauttaisi merkkijonon "Kyllä", jos T pysähtyy syötteellä x ja merkkijonon "Ei", jos T ei pysähdy syötteellä x tai T ei ole kelvollinen (valitulla ohjelmointikielellä kirjoitettu) tietokoneohjelma.

Osoittautuu, että tällaista tietokoneohjelmaa T_0 ei voida muodostaa. Seuraavaksi todistamme kyseiseen väitteen. Käytämme pohjana Wikipediasta [2] löytyvää todistusta. (Voit skipata todistuksen, jos sen lukeminen tuntuu liian raskaalta.)

> Tehdään vastaoletus: Tällainen tietokoneohjelma T_0 on olemassa. Muodostetaan T_0:aa muokkaamalla uusi tieto-

[2] Jokainen ohjelmointia harrastanut lukija lienee tehnyt vähintään kerran elämässään sellaisen ohjelmointivirheen, jonka johdosta ohjelma on jäänyt ikuiseen silmukkaan.

[3] Tällainen ikuisesti jatkuva laskenta voi vaatia laskennan edetessä yhä enemmän ja enemmän muistia. Oletamme, että tällaisella laskennalla on käytössään rajaton määrä muistia, niin, ettei se lopu.

koneohjelma T_1, joka saa syötteenään merkkijonon s ja toimii seuraavasti:

- Jos T_0 palauttaa syöteparilla s, s vastauksen "Ei", T_1 palauttaa syötteellä s tuloksena merkkijonon "ok".
- Jos T_0 palauttaa syöteparilla s, s vastauksen "Kyllä", T_1 jää syötteellä s laskemaan ikuisesti.

Nyt kysymys kuuluu: Kuinka T_1 toimii, jos sille annetaan itsensä (eli T_1) syötteeksi?

- Jos T_1 palauttaa syötteellä T_1 merkkijonon "ok", T_0 palauttaa parilla T_1, T_1 vastauksen "Ei", eli T_1 jää jumiin syötteellä T_1. Kuitenkin oletimme, että T_1 pysähtyy syötteellä T_1. Ristiriita.
- Jos taas T_1 jää jumiin syötteellä T_1, ohjelma T_0 palauttaa syöteparilla T_1, T_1 vastauksen "Kyllä", eli T_1 pysähtyy syötteellä T_1. Kuitenkin oletimme, että T_1 jää jumiin syötteellä T_1. Ristiriita.

Siis kaikki mahdolliset vaihtoehdot johtavat ristiriitaan, eli vastaoletuksemme on väärä, ja tietokoneohjelmaa T_0 ei voida muodostaa.

Olemme siis nyt löytäneet ensimmäisen eksaktisti määritellyn kysymyksen, jonka vastausta ei voida (kaikissa tilanteissa) laskea: Pysähtyykö annettu tietokoneohjelma annetulla syötteellä?

Voidaan tosin muodostaa sellainen tietokoneohjelma T_0, joka saa syötteenään tietokoneohjelman T ja merkkijonon s, ja joka simuloi T:n laskemista syötteellä s. Kuitenkin, jos laskenta kestää kauan, ei missään vaiheessa laskentaa välttämättä ole mahdollista sanoa, että olemme laskeneet niin kauan, että ohjelma ei varmasti tule pysähtymään.

4.3 Luettelevat tietokoneohjelmat

Aiemmin tutkimme tietokoneohjelmia, jotka yleensä pysähtyivät. Seuraavaksi määrittelemme käsitteen *luetteleva tietokoneohjelma*, joka ei saa syötettä, vaan alkaa laskennan tyhjästä, eikä välttämättä pysähdy. Luetteleva tietokoneohjelma antaa kuitenkin laskennan edetessä tulosteita. Koska laskenta voi jatkua äärettömästi, se voi laskennan kuluessa antaa yhteensä äärettömän määrän tulosteita.

Laskennan edetessä luetteleva tietokoneohjelma voi käyttää yhä enemmän ja enemmän muistia, ja oletamme, että luettelevalla tietokoneohjelmalla on käytössään rajattomasti muistia, niin, että ohjelman suoritus ei tyssää muistin loppumiseen[4].

Ne lukijat, jotka eivät tunne oloaan kotoisaksi tietokoneiden parissa, voivat yhä ajatella kynällä ja paperilla suoritettavaa laskentaa, joka jatkuu ja jatkuu, ja laskennan edetessä määrättyjä välituloksia kutsutaan tulosteiksi.

4.4 Totuus lukuteoriassa

Olkoon $(n, n+2)$ pari luonnollisia lukuja. Sanomme, että n ja $n+2$ ovat alkulukukaksoset, jos sekä n että $n+2$ ovat alkulukuja. On avoin ongelma, onko alkulukukaksosia äärellinen vai ääretön määrä. Jos kävisimme läpi kaikki luonnolliset luvut n ja testaisimme jokaisen kohdalla, ovatko n ja $n+2$ alkulukukaksosia, joutuisimme käymään läpi äärettömän monta lukua n, joten tällainen läpikäynti ei ole laskenta tarkoittamassamme mielessä[5]. Tällaisia väitteen "Alkulukukaksosia on ääretön määrä" kaltaisia, äärettömästä määrästä

[4] Lukija voi puolileikillisesti ajatella äärellisellä muistilla varustetun luettelevaa tietokoneohjelmaa suorittavan tietokoneen, joka osaa ilmoittaa muistin loppumisesta ja koneen vieressä istuvan juoksupojan, joka käy aina tarpeen vaatiessa ostamassa lisää muistia ja asentaa sen koneeseen laskennan jatkamiseksi.

[5] Useissa tapauksissa tällaisten kaikista luonnollisista luvuista puhuvien lauseiden totuus voidaan ratkaista äärellisellä todistuksella, ja useimmat uskonevatkin, että alkulukukaksoskysymys saadaan ennemmin tai myöhemmin ratkaistua tällä tavoin.

luonnollisia lukuja puhuvia lauseita on muitakin, ja herää kysymys, olisiko mahdollista muodostaa jokin ääretöntä läpikäyntiä ovelampi laskentamenetelmä, jolla ratkaista kaikkien tällaisten lauseiden totuus. Esittelemme tässä luvussa tuloksen, joka sanoo, että tämä ei ole mahdollista.

Tulos, jonka aiomme esitellä, puhuu luonnollisia lukuja koskevista lauseista. Koska tässä meillä lauseet ovat *matematiikan tutkimuksen kohde*, eivät *matematiikan tutkimuksen väline*, tarvitsemme eksaktin määritelmän niille lauseille, josta tuloksemme puhuu.

Jatkon kannalta olennaista on ymmärtää, että tarkoitamme lukuteorian lauseilla lauseita, jotka puhuvat luonnollisista luvuista, ja joilla on tietty, tarkasti määrätty muoto. Muoto on sellainen, että voidaan laskea, onko jokin merkkijono tätä muotoa oleva lause. Lisäksi kyseistä muotoa olevia lauseita on ääretön määrä. Tässä on huomattava, että muoto on sellainen, että kyseistä muotoa oleva lause voi olla joko tosi tai epätosi; muoto määrää vain sen, että kyseessä on mielekäs lause, jolla on totuusarvo.

Annamme hiukan tarkemman luonnehdinnan (joskaan emme tarkkaa määritelmää) sisennettynä. Sen voi halutessa sivuuttaa. Tarkkakin määritelmä on mahdollista antaa, mutta emme halua rasittaa lukijaa sen yksityiskohtien läpikäynnillä.

> Lukuteorian lauseella tarkoitamme ”mielekästä”, äärellistä lausetta, joka saadaan muodostettua käyttäen merkkejä $(,), 0, 1, +, \times, =, \wedge(\text{ja}), \neg(\text{ei}), \forall(\text{kaikilla})$, sekä rajatonta määrää muuttujasymboleja $x_0, x_1, \ldots$. Muuttujien ajatellaan saavan arvoikseen luonnollisia lukuja.
>
> Esimerkkejä lukuteorian lauseista ovat
>
> $$1 + 1 + 1 = 1 + 1,$$
>
> joka on hyvinmuodostettu (joskin epätosi) lause, joka väittää, että kaksi on yhtäsuuri kuin kolme,
>
> $$\forall x_0(x_0 = x_0 + 0),$$

joka väittää, että, jos mihin tahansa luonnolliseen lukuun lisätään nolla, saadan alkuperäinen luku,

$$\forall x_0 \neg (x_0 = x_0 + 1),$$

joka väittää, että mikään luonnollinen luku ei ole sellainen, että kun siihen lisätään yksi, saadaan alkuperäinen luku,

$$(0 = 0) \wedge (1 = 1),$$

joka väittää, että sekä nolla että yksi ovat yhtäsuuria itsensä kanssa,

$$\forall x_0 \neg (x_0 \times 0 = 0),$$

joka on epätosi lause, joka väittää, että mikään luonnollinen luku kerrottuna nollalla ei ole nolla sekä

$$\forall x_0 \neg \forall x_1 \neg (x_1 = x_0 + 1),$$

joka väittää, että jokaiselle luonnolliselle luvulle x_0 on olemassa toinen luonnollinen luku x_1 siten, että $x_1 = x_0 + 1$. (Tässä kannattaa huomata, että "Ei ole niin, että millään x ei päde..." tarkoittaa samaa kuin "On olemassa x, jolle pätee...".)

Myös väite, että alkulukukaksosia on ääretön määrä, on mahdollista kirjoittaa lukuteorian lauseena, joskin lauseesta tulisi melko pitkä.

Lukuteorian lauseen käsitteeseemme sisältyy myös se, että jokaiseen x_i:n esiintymään vaikuttaa kvanttori $\forall x_i$, eli

$$x_2 = x_2 + 0$$

ei ole lukuteorian lause tarkoittamassamme mielessä.

Nyt voidaan todistaa seuraavaa teoreemat

Teoreema 1 *Ei voida muodostaa luettelevaa tietokoneohjelmaa, joka luettelee kaikki todet lukuteorian lauseet ja vain ne.*

Teoreema 2 *Ei voida muodostaa tietokoneohjelmaa, joka saadessaan toden lukuteorian lauseen syötteeksi antaa tuloksen "kyllä" ja saadessan epätoden lukuteorian lauseen syötteeksi antaa tuloksen "ei".*

Todistukset ovat vaikeita, ja ne löytyvät teoksesta Väänänen [1]. (Tulosten saamiseksi tarvitsemme Määritelmän 13.1, Lauseen 12.8 ja Lauseen 12.3.)

Olemme nyt löytäneet toisen hyvinmuotoillun ongelman, jonka vastausta ei voida (kaikissa tapauksissa) laskea, nimittäin matemaattisten väitteiden totuuden. Sanon edellä "matemaattisten väitteiden", mutta itse asiassa olemme todenneet, että laskemattomuus koskee jo hyvin rajallista muotoa olevia matemaattisia väitteitä.

4.5 Seuraus matematiikan harjoittamiselle

Oletetaan, että olemme saaneet matemaattisen todistuksen käsitteen niin hyvin määritellyksi, että voidaan laskea, onko annettu merkkijono todistus. Ts. voidaan muodostaa tietokoneohjelma T_0, joka saa syötteenään parin P, R, ja palauttaa merkkijonon "Ok", jos merkkijono P on lauseen R todistus ja merkkijonon "Ei-Ok", jos näin ei ole. Tämä oletus on realistinen, koska näin voidaan tehdä[6]. Käytännössä vain todistusten saaminen tällaisen eksaktiin muotoon on äärimmäisen työlästä, joten matemaatikot eivät koskaan esitä todistuksia tässä muodossa.

Nyt voidaan muodostaa luetteleva tietokoneohjelma T_1, joka toimii seuraavasti: Se käy läpi kaikki parit P, R, ja aina kohdatessaan

[6]Siihen, kuinka tämä tehdään, emme tässä mene, mutta taikasanat ovat 1. kertaluvun predikaattilogiikka + ZFC.

parin P, R, missä P on R:n hyväksyttävä todistus, se tulostaa R:n[7]. Ohjelma voidaan tehdä mm. niin, että ensin käydään läpi kaikki kahden merkin mittaiset parit P, R, sitten kaikki kolmen merkin mittaiset parit P, R, sitten kaikki neljän merkin mittaiset ja niin edelleen.

Edelleen T_1:n avulla voidaan muodostaa luetteleva tietokoneohjelma T_2, joka poimii T_1:n tulosteista kaikki lukuteorian lauseet. T_2 siis luettelee kaikki lukuteorian lauseet, joille on olemassa hyväksyttävä todistus.

Edellisessä luvussa totesimme, että ei voida muodostaa luettelevaa tietokoneohjelmaa, joka luettelee kaikki todet lukuteorian lauseet. Koska T_2 luettelee kaikki lukuteorian lauseet, joille on hyväksyttävä todistus, vedämme seuraavan johtopäätöksen: On olemassa tosia lukuteorian lauseita, joita ei voida todistaa nykyisen todistuskäsityksen mukaisesti. Sama pätee mille tahansa todistuskäsitykselle, jossa todistuksen pätevyys voidaan laskea.

4.6 Pähkinöitä

1. Osoita, että ei voida muodostaa tietokoneohjelmaa T_0 siten, että T_0 saa syötteenään tietokoneohjelman T, ja palauttaa merkkijonon "Tosi", jos T pysähtyy kaikilla syötteillä ja merkkijonon "Epätosi", jos on vähintään yksi syöte, jolla T ei pysähdy. (Tässä tehtävässä valitaan ohjelmointikieli ja oletetaan, että kaikki tehtävässä mainitut ohjelmat on kirjoitettu tällä kielellä.)

2. Edellisen kappaleen lopussa annoimme argumentin sille, että on olemassa vähintään yksi tosi lukuteorian lause, jota ei voida todistaa nykyisen todistuskäsityksen mukaisesti. Osoita käyttäen tässä kirjoitelmassa mainittuja tuloksia, että tällaisia lukuteorian lauseita on ääretön määrä.

[7] Vaikka tällainen tietokoneohjelma voidaan teoriassa tehdä, käytännössä se on niin hidas, että sen käyttäminen todistusten etsimiseen on aivan toivotonta.

3. Olkoon T luetteleva tietokoneohjelma. Osoita, että voidaan muodostaa tietokoneohjelma, joka antaa vastauksen ”Kyllä” täsmälleen niillä syötteillä, jotka T luettelee (ja muilla syötteillä jää jumiin).

4. Olkoon T tietokoneohjelma, joka joillan (ennaltamäärätyssä äärellisessä aakkostossa annetuilla) syötteillä antaa tuloksen ”Kyllä”, joillain (samassa aakkostossa annetuilla) syötteillä antaa tuloksen ”Ei” ja jää jumiin lopuilla (samassa aakkostossa annetuilla) syötteillä. Osoita, että voidaan muodostaa luetteleva tietokoneohjelma, joka luettelee täsmälleen ne syötteet, joilla T antaa tuloksen ”Kyllä”.

Luku 5

$P = NP$-ongelma - mikä se on?

5.1 Johdanto

Tässä kirjoitelmassa esittelemme erään kuuluisimmista avoimista matemaattisista ongelmista. Kyse on $P = NP$-kysymyksestä, joka kysyy, voidaanko tiettyjä tietokoneella suoritettavia laskentoja suorittaa nopeasti. Yhtälössä P tarkoittaa nk. polynomisessa ajassa laskettavia ongelmia ja NP nk. polynomisessa ajassa eideterministisesti laskettavia ongelmia. Nämä käsitteet määritellään myöhemmin tässä tekstissä. Yhtälö $P = NP$ siis väittää, että nämä kaksi ongelmaluokkaa ovat samat. Onko näin? Sitä kukaan ei tiedä.

Koska kyse on matemaattisesta ongelmasta, ratkaisuksi vaaditaan todistusta, jommalle kummalle seuraavista:

- **Todistus sille, että kyseiset luokat ovat samat**. Tämä voitaisiin todistaa mm. tekemällä tiettyjä NP-luokkaan kuuluvia ongelmia nopeasti ratkova tietokoneohjelma.

- **Todistus sille, että luokat ovat eri.** Tämä tarkoittaisi todistusta sille, että on mahdotonta tehdä tiettyjä NP-luokkaan kuuluvia ongelmia nopeasti ratkovaa tietokoneohjelmaa.

Jos joku saa $P = NP$ -kysymyksen ratkaistua, Clay Mathematics Institute on luvannut ratkaisusta miljoonan dollarin palkinnon. Yllättävää kyllä, palkinto olisi periaatteessa mahdollista saada riittävän hyvällä Miinaharava-pelin analyysilla.

5.2 Laskennasta

Tässä kirjoitelmassa tarkoitamme tietokoneohjelmalla ohjelmaa, joka saa aluksi yhden syötteen, joka on äärellinen merkkijono[1], laskee sitä aikansa, ja lopuksi palauttaa joko merkkijonon "Kyllä" tai merkkijonon "Ei". Tavallisessa tietokoneessa on rajallinen määrä muistia, ja tavallisissa yhteyksissä on rajallinen määrä aikaa laskennalle, mutta laskennan teoreettisessa tarkastelussa oletetaan, että nämä suureet ovat riittävän suuria käsilläolevan laskennan loppuunviemiseksi, olivatpa ne kuinka suuria tahansa, kunhan ne ovat äärellisiä. Samoin ohjelman saama syöte saa olla kuinka pitkä tahansa, kunhan se on äärellinen.

5.3 Polynominen aika

Olkoon T tietokoneohjelma edellisessä luvussa kuvaillussa mielessä. Merkitään $f(1)$:llä pisintä aikaa, jonka ohjelma käyttää laskentaan yhden merkin mittaisella syötteellä. Yhden merkin mittaisia syötteitä on useita, ja merkitsemme siis $f(1)$:llä maksimia kaikkien yhden merkin mittaisten syötteiden vaatimista ajoista. Merkitään $f(2)$:lla pisintä aikaa, jonka ohjelma käyttää laskentaan kahden merkin mittaisella syöttellä ja niin edelleen. Näin saamme funk-

[1] Yhteen merkkijonoon voidaan koodata vaikka millä mitalla tietoa, eli ohjelmamme voi saada syötteeksi esimerkiksi useita lukuja vaikkapa puolipisteellä erotettuna

tion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (voidaan olettaa, että laskenta-ajat ovat kokonaislukuja ja voidaan asettaa $f(0) = 0$).

Tyypillisesti $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, ja meitä kiinnostava kysymys on:

Kuinka nopeasti f lähenee ääretöntä?

Sanomme, että ohjelman T vaatima aika on *polynominen*, jos on olemassa (kokonaiskertoiminen) polynomi Q, jolle $f(n) \leq Q(n)$ kaikilla n. Tässä sillä, mikä on ykköstä edustava ajanjakso f:n määritelmässä ei ole merkitystä. Samat ohjelmat ovat polynomisia, valittinpa tuo ajanjakso lyhyeksi tai pitkäksi.

Jos ohjelman T vaatima aika on polynominen, ohjelmaa T pidetään yleensä nopeana. Tämä johtuu siitä, että n:n kasvaessa minkä tahansa polynomin $Q(n)$ arvo kasvaa kohti ääretöntä suhteellisen hitaasti. Polynominen ohjelma onkin oikeasti nopea, jos polynomin Q aste on pieni. Jos polynomin Q aste on suuri, voi ohjelma olla käytännössä liian hidas vaikka se olisikin polynominen.

Jos ohjelman T vaatima aika ei ole polynominen, se on niin hidas, että laskenta yhtään pidemmillä syötteillä on käytännössä toivotonta. Eksponenttifunktio $f(n) = 2^n$ kasvaa nopeammin kuin mikään polynomi. Voidaan siis todistaa, että jos Q on polynomi, on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että kaikilla $n > n_0$ pätee $f(n) > Q(n)$. Ei-polynomisten tietokoneohjelmien aikavaatimukset ovatkin melko usein joitakin eksponenttifunktion johdannaisia.

Esimerkki 1 *Olkoon T ohjelma, joka saa syötteenään listan lukuja sekä luvun k, ja joka tutkii käymällä listan läpi, onko luku k listassa. Tällaiselle ohjelmalle parhaan polynomin Q aste on yksi, eli T on polynominen ja nopea.*

Esimerkki 2 *Tässä esimerkissä puhutaan alkulukutesteistä, eli ohjelmista, jotka saavat syötteenään kymmenjärjestelmässä esitetyn luvun ja palauttavat tiedon siitä, onko kyseessä alkuluku. Huomautamme, että kun puhumme siitä, onko joku alkulukutesti po-*

lynominen emme tarkoita, että onko ohjelman suoritusaika korkeintaan joku syötteenä saadun luvun polynomi, vaan sitä, onko ohjelman suoritusaika korkeintaan joku syötteenä saadun luvun kymmenjärjestelmäesityksen pituuden polynomi. Esimerkiksi luvun 1000000 kymmenjärjestelmäesityksessä on seitsemän merkkiä, mikä on huomattavasti vähemmän kuin miljoona.

Jos käymme läpi kaikki kaikki luonnolliset luvut, jotka ovat korkeintaan syötteenä annetun luvun neliöjuuri ja testaamme jokaisen kohdalla, onko kyseessä syötteen tekijä, saamme aikaan alkulukutestin, mutta sen vaatima laskenta-aika on niin pitkä, että testimme ei ole polynominen. Jos n *on syötteenä saadun luvun kymmenjärjestelmäesityksen pituus, syötteenä saadun luvun neliöjuurta pienempiä lukuja on yli* $10^{n/2-2} = \frac{1}{100}\sqrt{10}^n$*, mikä on suurempi kuin* 2^n*, kun* n *on riittävän suuri.*

Paras tunnettu varmasti toimiva alkulukutesti on polynominen, mutta paras sille tunnettu polynomi Q *on astetta seitsemän. Näin suuri aste tarkoittaa sitä, että käytännössä tätä ohjelmaa ei käytetä alkulukujen testaamiseen, vaan alkulukutesteinä käytetään nopeampia ohjelmia, jotka toimivat vain tietyllä todennäköisyydellä, joka tosin saadaan huomattavan korkeaksi.*

5.4 Päätösongelmat

Olkoon M (jossain äärellisessä aakkostossa esitettyjen) äärellisten merkkijonojen joukko, ja M', M'' joukon M jako kahteen osaan eli *päätösongelma*. Olkoon $m \in M$. Meitä kiinnostaa, kumpaan osaan, M' vai M'', m kuuluu. Olkoon T tietokoneohjelma, joka ratkaisee tämän, eli T on ohjelma, joka saa syötteenään m:n, ja T kertoo, kumpaan osaan, M' vai M'', syöte m kuuluu. Oletamme siis, että T toimii näin kaikkien M:n alkioiden kohdalla. Tällaisessa tapauksessa sanomme, että T *ratkaisee päätösongelman* M', M''.

Jos jollekin päätösongelmalle M', M'' on mahdollista kirjoittaa sen ratkaiseva tietokoneohjelma, joka toimii polynomisessa ajassa, sanomme, että M', M'' on polynominen. Polynomisten päätösongelmien luokkaa merkitään kirjaimella P.

5.5 Kauppamatkustajan ongelma

Tutkitaan seuraavaa päätösongelmaa: On annettu joukko kaupunkeja sekä hinnat kaikkien kahden kaupungin välisille matkoille. On lisäksi annettu maksimihinta h. Kauppamatkustajan ongelma kuuluu: Voidaanko tehdä kiertomatka, joka alkaa jostain kaupungista ja päättyy samaan kaupunkin niin, että jokaisessa kaupungissa käydään kerran ja kierroksen yhteishinta on korkeintaan h?

Jos haluamme saada tämän päätösongelman edellisessä kappaleessa esitettyyn formalismiin, M' siis kuvaa niitä systeemejä s (jossain merkkijonokoodauksessa esitettynä; tässä siis s sisältää tiedot kaupungeista, niiden välisten matkojen hinnoista sekä maksimihinnan h), joille kyseisenlainen kiertomatka on olemassa, ja M'' kuvaa muita systeemejä.

Kukaan ei tiedä, onko tämä päätösongelma polynominen, eli onko nopein mahdollinen tämän päätösongelman ratkaiseva tietokoneohjelma polynominen. Lukijalla kävi ehkä mielessä, että ongelma voitaisiin ratkaista käymällä kaikki mahdolliset reitit läpi ja katsomalla jokaisen reitin kohdalla, onko sen hinta korkeintaan h. Syötteen pituuden kasvaessa tällaisen laskennan viemä aika kasvaa kuitenkin nopeammin kuin mikään syötteen pituuden polynomi, eli tämä ei kelpaa polynomiseksi ratkaisuksi. Polynomisessa ajassa tämän ongelman ratkaisevan tietokoneohjelman pitäisi siis olla huomattavasti ovelammin laadittu.

Kuitenkin seuraavanlainen polynominen tietokoneohjelma T on olemassa: Olkoon s kuten edellä ja k on kiertomatka systeemissä s. T saa syötteenään parin s, k ja ratkaisee, onko k sellainen kierros, että sen hinta on korkeintaan h.

5.6 Ei-deterministinen polynominen aika

Olkoon M', M'' päätösongelma. Oletetaan, että jokaiselle $m \in M'$ on olemassa toinen merkkijono m', jota kutsutaan m:n *todistajaksi.* Sallimme myös sen, että merkkijonolla voi useita todistajia. Lisäksi oletamme, että m:n lyhyimmän todistajan pituus on korkeintaan joku m:n pituuden polynomi. Lisäksi oletamme, että jos $m \in M''$, m:llä ei ole todistajia.

Esimerkiksi Kauppamatkustajan ongelma on tällainen päätösongelma: Systeemin s todistaja on kiertomatka k, jonka hinta on korkeintaan h.

Sanomme, että M', M'' on ei-deterministinen polynominen päätösongelma, jos on olemassa polynomisessa ajassa toimiva tietokoneohjelma T, joka saa syötteenään parin m, m' ja ratkaisee, onko m' jonon m todistaja. Ei-determinististen polynomisten päätösongelmien luokkaa merkitään NP. Kuten edellisen luvun viimeisessä kappaleessa totesimme, Kauppamatkustajan ongelma on ei-deterministinen polynominen päätösongelma.

Huomautamme, että jos M', M'' on ei-deterministinen polynominen päätösongelma, on olemassa tietokoneohjelma T, joka ratkaisee tämän päätösongelman, joskin epärealistisen hitaasti. T muodostetaan seuraavasti: Olkoon Q polynomi siten, että jos m on pituutta n oleva syöte, jolla on todistaja, m:llä on korkeintaan pituutta $Q(n)$ oleva todistaja. Nyt, kun tietokoneohjelmalle T annetaan syöte m, se käy kaikki korkeintaan pituutta $Q(n)$ olevat merkkijonot läpi ja kokeilee jokaisen kohdalla, onko kyseessä m:n todistaja. Syötteen pituuden kasvaessa tällaisen laskennan viemä aika kasvaa kuitenkin nopeammin kuin mikään syötteen pituuden polynomi, eli tämä ei kelpaa polynomiseksi ratkaisuksi.

Sivuhuomautuksena vielä mainittakoon, että nimitys ei-deterministinen polynominen tulee siitä, että tällaiset ongelmat voidaan ratkaista polynomisessa ajassa kuvitteellisilla tietokoneohjelmilla, jotka toimivat "ei-deterministisesti" eli osaavat arvata oikein. NP-päätösongelma voidaan ratkaista ei-deterministisesti niin, että ensin arvataan oikein todistaja ja sen jälkeen tarkastetaan polynomisessa ajassa, että arvattiin oikein.

5.7 Onko $P = NP$?

Nyt saamme muotoiltua $P = NP$-kysymyksen. Se siis kysyy, onko luokka P sama kuin luokka NP. Jos T on jonkin päätösongelman M', M'' ratkaiseva polynominen tietokoneohjelma, voidaan ajatella, että jokaisen M':uun kuuluvan syötteen todistaja on tyhjä merkkijono, joten T toimii myös ei-deterministisessä polynomisessa ajassa. Siis P sisältyy luokkaan NP. Kysymys siis kuuluu: Voidaanko jokainen ei-deterministinen polynominen päätösongelma ratkaista polynomisessa ajassa, siis ohjelmalla, joka saa syötteekseen vain alkuperäisen syötteen eikä todistajakandidaattia? Kukaan ei tiedä. Yleisesti uskotaan, että nämä kaksi luokkaa ovat eri, mutta kukaan ei osaa todistaa, että kaikkia NP-ongelmia on mahdotonta ratkaista polynomisessa ajassa.

Sen verran kuitenkin tiedetään, että jos Kauppamatkustajan ongelma saataisiin ratkaistua polynomisessa ajassa, ratkaisusta osattaisiin muokata minkä tahansa NP-päätösongelman polynominen ratkaisu. Tällaisia NP-päätösongelmia, joiden polynominen ratkaisu ratkaisisi $P = NP$ -kysymyksen kertaheitolla on muitakin. Esimerkkinä tällaisesta mainittakoon seuraava:

Esimerkki 3 *Miinaharava-pelin tilanteella tarkoitamme mielivaltaisen kokoista Miinaharava-pelin tilannetta, jossa osa ruuduista on avattu ja osa avaamatta, ja kussakin avatussa ruudussa on numero, joka voi olla myös nolla. Lisäksi tilanteessa on asetettu lippuja osaan niistä ruuduista, joissa on miina. On myös mahdollista, että yhtään lippua ei ole asetettu. Oletamme kuitenkin, että liput on asetettu oikein, eli jokaisessa sellaisessa ruudussa, jossa on lippu, on myös miina.*

Nyt päätösongelmamme on seuraava: On annettu Miinaharavapelin tilanne. Onko olemassa (muiden kuin liputettujen) miinojen sellaisia sijainteja, että ne sopivat annettuun tilanteeseen?

5.8 Lopuksi

NP ei suinkaan ole vaikeimpien mahdollisten päätösongelmien luokka. On olemassa päätösongelmia, jotka ovat ratkaistavissa tietokoneella[2], mutta jotka ovat niin vaikeita, että ne eivät kuulu edes luokkaan NP. Päätösongelmille on määritelty paljon muitakin luokkia kuin P ja NP, ja $P = NP$ -kysymyksen lisäksi myös paljon muita luokkia koskevia kysymyksiä on vastaamatta. $P = NP$ -kysymys on pelkästään näistä kuuluisin.

On olemassa myös päätösongelmia, joita mikään tietokoneohjelma ei ratkaise. Tällaisiin tutustuimme edellisessä kirjoitelmassa.

5.9 Pähkinöitä

1. Olkoon $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funktio, jolle on olemassa polynomi Q ja luonnollinen luku n_0 siten, että $f(n) \leq Q(n)$ aina, kun $n \geq n_0$. Osoita, että on olemassa polynomi Q' siten, että $f(n) \leq Q'(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. (Tämä tehtävä osoittaa, että tässä kirjoitelmassa annettu polynomisen aikavaatimuksen määritelmä on yhtäpitävä kirjallisuudesta yleisemmin löytyvän määritelmän kanssa.)

2. Tutkitaan Esimerkissä 3 esitettyä Miinaharavaa koskevaa päätösongelmaa. Osoita, että kyseinen ongelma kuuluu luokkaan NP.

3. Osoita, että jos Esimerkissä 3 esitetty Miinaharavaa koskeva päätösongelma saataisiin ratkaistua polynomisessa ajassa, saataisiin polynomisessa ajassa ratkaistua myös seuraava päätösongelma: On annettu Miinaharava-pelin tilanne ja suljettu ruutu r. Onko varmaa, että ruudussa r ei ole miinaa?

4. Onko $P = NP$?

[2] Joskin käytännön kannalta epärealistisen hitaasti.

Luku 6

Heittäydytäänpä filosofisiksi

6.1 Johdanto

Filosofit ovat kehitelleet teorioitaan kaikesta mahdollisesta. Jotkut filosofit ovat kehitelleet teorioitaan myös matematiikasta. Tyypillisiä kysymyksiä, joista filosofit ovat matematiikassa kiinnostuneet, ovat esimerkiksi seuraavat:

- Mitä matemaattiset oliot (luvut, vektorit, lukujoukot kuten $\mathbb{R}$ ym.) tarkalleen ottaen ovat?
- Missä mielessä todet matemaattiset väitteet ovat tosia?
- Missä määrin ihmiset voivat luotettavasti hahmottaa äärettömyyttä, esim. äärettömiä lukujoukkoja?

Filosofit harvoin ovat yksimielisiä mistään, ja tämä pätee myös matematiikkaa koskeviin filosofisiin kysymyksiin. Tässä kirjoitelmassa esittelenkin muutamia matematiikanfilosofisia koulukuntia, ja heidän vastauksiaan yllämainittuihin kysymyksiin.

6.2 Platonismi

Platon oli antiikin Kreikassa elänyt filosofi. Platonin filosofialle ominaista oli se, että hän uskoi todellisimmassa mielessä olemassaoleviksi sellaiset asiat kuten hyvyys, kauneus ja totuus. Näitä kolmea hän käytti esimerkkeinä tosiolevasta, mutta samaan kategoriaan voidaan lukea kaikki ominaisuudet tai yleiskäsitteiden kuvamat abstraktit asiat kuten punaisuus ja pyöreys. Ne yksittäiset asiat, joita havaitsemme aistein arkielämässämme olivat Platonille vain tosiolevan epätäydellistä heijastumaa.

Mietitään lukua kaksi. Se voidaan kirjoittaa arabialaisin numeroin 2, roomalaisin numeroin II, sanallisesti kaksi tai englanniksi two. Kuitekin näillä ilmauksilla, 2, II, kaksi ja two on jotain yhteistä. Tekisi mieli ajatella, että nämä ilmaukset kaikki nimeävät saman olion, abstraktin luvun kaksi. Lukua on vaikea ajatella merkkinä paperilla, koska tällöin näyttäisi siltä, että jonkun neljästä mainitusta ilmauksesta pitäisi olla "oikea" kakkonen. Ennemmin kuitenkin näyttää siltä, että nuo neljä ilmausta ovat yhtä oikeita nimiä jollekin, joka on enemmän kuin mikään näistä ilmauksista.

Ajatellaan sitten sellaista matemaattista oliota kuin täydellisen pyöreää ympyrää. Matemaatikot operoivat sillä täysin rutiininomaisesti, mutta fysikaalisesta maailmasta ei sellaista löydy. Yrittipä valmistaa kuinka pyöreän kiekon tahansa, siihen jää aina pieniä epätasaisuuksia. Täydellisen pyöreä ympyrä onkin idealisoitu, teoreettinen olio.

Matemaattiset oliot kuten luvut, vektorit, lukujoukot ja täydellisen pyöreät ympyrät voidaan siis ajatella samalla tavoin abstrakteina, idealisoituina olioina kuin hyvyys, kauneus, totuus ja punaisuus. Nykyään platonismiksi kutsutaankin matematiikanfilosofian suuntausta, jonka mukaan on olemassa "oikeasti olemassa oleva" matemaattisten olioiden todellisuus, johon abstraktit matemaattiset oliot kuuluvat.

Platonistien mukaan matemaattisten olioiden todellisuus on ikuinen ja ihmisestä riippumaton. Matemaattisten väitteiden totuus on platonistille ongelmaton: Esimerkiksi väite "Alkulukuja on ääretön määrä" on tosi, koska matemaattisten olioiden todellisuudessa on ääretön määrä olioita, jotka ovat alkulukuja.

Suhtautuminen äärettömyyteen on samoin ongelmatonta: Vaikka ihmisen hahmotuskyky samoin kuin arkimaailma on äärellinen, ei ole mitään periaatteellista estettä, miksei ihmisestä ja arkitodellisuudesta irrallisessa matemaattisten olioiden todellisuudessa voisi olla äärettömiä olioita, esimerkiksi reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

Lukijasta yllämainittu filosofia voi tuntua kummalliselta, ja minustakin on kummallista, että filosofit ovat tosiaan väitelleet siitä, ovatko sellaiset asiat kuten punaisuus ja pyöreys oikeasti olemassa. Mitä annettavaa platonismilla on siis matemaatikolle?

Vastaus kuuluu: Työskennellessään suurin osa ammattimatematikoista ajattelee matemaattisia olioita ikään kuin ne olisivat juuri sellaisia kuin platonistit väittävät! Tämä on yksinkertaisesti tehokkain tapa löytää päteviä todistuksia. Olen kuullut myös huhuja matemaatikoista, jotka ajattelevat kaavoja, eivät abstrakteja matemaattisia olioita, mutten kykene itse hahmottamaan, kuinka nämä myyttiset kaavamatemaatikot pystyvät työskentelemään.

Sunnuntaikristittyjen lisäksi olenkin kuullut puhuttavan sunnuntaiformalisteista. Sunnuntaiformalisti on matemaatikko, joka arkisin käytännössä työskentelee platonistisista lähtökohdista käsin, mutta sunnuntaisin, tehdessään matematiikanfilosofiaa, omaksuu jonkun muun matematiikanfilosofian koulukunnan kannan, esimerkiksi formalismin.

6.3 Formalismi

Mitä maallikolle tulee mieleen, kun joku sanoo sanan matematiikka? No kaavat. Formalismi onkin matematiikanfilosofinen kanta, jonka mukaan platonistin abstrakteja matemaattisia olioita ei ole olemassa, vaan matematiikassa on kyse kaavoista ja niiden manipuloimisesta.

Mitä kaavojen manipulointi sitten tarkoittaa? Lukijalle lienee tuttua, että esimerkiksi kaavan $(x+1)^2$ saa purkaa muotoon $x^2 +$

$2x+1$. Matematiikassa on paljon tällaista kaavamanipulaatiota, mutta voidaanko koko matematiikka esittää tällaisena?

Formalisti tyypillisesti ajattelee matematiikan lähtevän liikkeelle aksioomista, jotka voidaan ilmaista kaavoina. Matematiikan tekeminen on formalistin mielestä sitä, että aksioomista päätellään uusia kaavoja, teoreemoja, päättelysääntöjen mukaan. Päättelysääntöjen pitää olla sellaisia, että ne ovat esitettävissä yksinkertaisena merkkijonomanipulaationa.[1]

On ollut jo yli sata vuotta tiedossa, että alkeislogiikan[2] päättelysäännöt voidaan esittää yksinkertaisena merkkijonomanipulaationa. Esimerkiksi väitteestä "A ja B" voidaan päätellä väite "A", ja samoin väite "B". Muut alkeislogiikan päättelysäännöt ovat samanhenkisiä, jotkut ehkä hiukan monimutkaisempia.

Ehkä tärkein aksioomien ominaisuus on se, että aksioomien täytyy olla ristiriidattomat, eli sellaiset, että niistä ei voida päätellä ristiriitaa. Formalisti tyypillisesti pitääkin matemaattisesti tasa-arvoisina kaikkia ristiriidattomia aksioomasysteemejä. Muita tärkeämäksi jonkun tietyn aksiomatisoinnin voi tehdä joku eimatemaattinen syy, esimerkiksi se, että fyysikko tarvisee työssään tietynlaista matematiikkaa.

Matemaatikon on teoreettisesti mahdollista olla formalisti, koska suurin osa käytännössä tehdystä matematiikasta palautuu joukko-oppiin. Melkein mitä tahansa matematiikkaa voidaan tehdä joukko-opin ZFC-aksioomista käsin, käyttäen alkeislogiikan päättelysääntöjä päättelysääntöinä. Ongelma vain on siinä, että osataan todistaa, että ZFC-aksioomien ristiriidattomuutta ei voida todistaa, joten formalistille jää aina pieni epäilyksen siemen koskien niiden ristiriidattomuutta.

Äärettömyys on formalistille ongelmatonta. Hän voi kirjoittaa

[1] Olennaista on, että aksioomat, teoreemat ja päättelyt *voidaan haluttaessa ilmaista* kaavoina ja kaavamanipulaatioina. On yhdentekevää, ilmaistaanko ne käytännössä luonnollisella kielellä vai kaavoilla, kunhan ne voitaisiin haluttaessa ilmaista kaavoina.

[2] Alkeislogiikalla tarkoitan tässä ensimmäisen kertaluvun predikaattikalkyylia.

aksiooman, joka esimerkiksi sanoo, että ääretön joukko on olemassa, ja tällaista aksioomaa voi käyttää kuten muitakin aksioomia. Formalistin aksioomat ja uusien kaavojen johdot ovat äärellisiä operaatioita äärellisillä merkkijonoilla, joten tällä tavoin formalisti onnistuu kiertämään äärettömyyttä koskevat ongelmat.

Formalismin ongelma on matemaattisten väitteiden totuus. Tutkitaan esimerkiksi väitettä ”Alkulukuja on ääretön määrä.” Formalistin mielestä tämä väite ei ole sananmukaisesti tosi, koska sellaisia olioita kuin alkulukuja ei ole olemassakaan. Formalisti joutuukin uudelleentulkitsemaan väitteen väitteeksi ”Aksioomistani voi johtaa väitteen *Alkulukuja on ääretön määrä.*”, ja vasta tämä väite on sananmukaisesti tosi. Puhuessaan muiden matemaatikkojen kanssa matematiikasta formalisti joutuukin koko ajan salaa ajattelemaan, että hän tarkoittaa hiukan jotain muuta kuin mitä hän sanoo ääneen.

Toinen formalismin ongelma on se, että tehdessään matematiikkaa monet matemaatikot tosiaan ajattelevat abstrakteja matemaattisia olioita, eivät kaavoja, ja formalistinen matematiikanfilosofia ei oikein selitä, kuinka tämä on mahdollista. Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen entinen johtaja Jouko Väänänen onkin sanonut, että matemaatikolle formalismi on lähinnä tapa päästä eroon filosofeista. Kun filosofi tulee kyselemään matemaatikolta kiusallisia kysymyksiä matematiikanfilosofiasta, matemaatikko voi vastata: ”Minä vain raapustelen näitä kaavoja liitutaululle. Jätä minut rauhaan.”

6.4 Fiktionalismi

Fiktionalismia on montaa lajia, ja alla käsittelen Mark Balaguerin fiktionalismia.

Platonismin ongelma on se, että platonistit olettavat epämääräisiä ”oikeasti olemassa olevia” abstrakteja matemaattisia olioita. Formalismissa taas oli muita ongelmia. Kuinka platonismin hyvät puolet voitaisiin säilyttää, kuitenkin niin, ettei epämääräisiä olemassaoloväitteitä tarvittaisi? Eräs ratkaisuehdotus on fiktionalismi. Fiktionalismin mukaan matematiikassa on kyse abstrakteista matemaattisista olioista ja niiden ominaisuuksista, mutta nämä matemaattiset oliot ovat fiktiivisiä.

Ensimmäinen mieleen tuleva kysymys on tietysti se, että mitä opetettavaa fiktiivisten olioiden pyörittelyllä olisi meille, jos matematiikassa on siitä kyse. Kuitenkin muista yhteyksistä tiedämme, että fiktio on joskus hyvinkin opettavaista. Esimerkiksi Orwelliin romaani 1984 on aivan loistava varoitus totalitarismin vaaroista. Samoin fyysikkojen kilon painoista pistemäistä kappaletta ei ole oikeasti olemassa, mutta sitä voidaan hyvinkin käyttää havainnollistavana esimerkkinä fysiikassa. Näin ollen en itse ole yhtään sitä mieltä, että matemaattisten olioiden pitäminen fiktiivisinä vähentäisi matematiikan arvoa.

Äärettömyys on tietysti fiktionalistille ongelmatonta. Mikään ei estä fiktionalistia kuvittelemasta äärettömiä joukkoja. Samoin käytännön matemaatikon työskentely abstraktien matemaattisten olioiden parissa on filosofisesti ongelmatonta: Matemaatikko kuvittelee matemaattiset oliot!

Toisin kuin formalisti, fiktionalisti ei joudu uudelleentulkitsemaan matematiikan lauseita, vaan hänelle "Alkulukuja on ääretön määrä" tosiaan tarkoittaa sitä, että alkulukuja on ääretön määrä. Onko väite sitten fiktionalistille tosi vai epätosi onkin hiukan kinkkisempi juttu. Ainakin se on yhtä tosi kuin ne kaikkien tuntemat tosiasiat, että Joulupukilla on valkoinen parta, ja että Frodo Reppuli on kotoisin Konnusta.

Mark Balaguerin mukaan tietyt platonismin alalajit ja hänen versionsa fiktionalismista tulevat hyvin lähelle toisiaan. Ero on vain matemaattisten olioiden "todellisessa" olemassaolossa, mitä Balaguer pitää hyvin vähämerkityksisenä kysymyksenä.

On myös huomattava, että platonisti, formalisti ja Balaguerlainen fiktionalisti käytännössä hyväksyvät päteviksi täsmälleen samat matematiikan tulokset, ja nämä tulokset ovat myös ne, jotka ei-filosofisesti suuntautuneet matemaatikot hväksyvät. Seuraavaksi esittelen kaksi matematiikanfilosofian koulukuntaa, jotka eivät hyväksy päteviksi kaikkia matemaatikkojen hyväksymiä matematiikan tuloksia.

6.5 Finitismi

Ryhdy mielessäsi laskemaan *yksi, kaksi, kolme, neljä, ...* Kuinka pitkälle pääsit? Ehkä sataan? Et ainakaan päässyt loppuun asti; et luetellut kaikkia luonnollisia lukuja. Mielesi on rajoittunut äärelliseen. Lähde nyt juoksemaan. Kuinka pitkälle pääsit? Juoksit ehkä kilometrin tai kaksi. Et kuitenkaan päässyt äärettömän pitkälle. Myös arkimaailmamme on rajoittunut äärelliseen.

Mielemme tai se maailma missä elämme, ei tavoita ääretöntä. Kuinka tällaisessa tilanteessa voisimme tuntea äärettömyyden ja operoida sillä pätevästi? Finitistisen matematiikanfilosofian koulukunnan mukaan et voikaan. Finitistien mielestä ainoastaan äärellistä käsittelevä matematiikka on pätevää.

Finitismi on kuitenkin hankala matematiikanfilosofia matematiikolle, koska äärettömyyteen törmää lähes kaikkialla modernissa matematiikassa. Lukujoukot ovat äärettömiä, äärettömiä lukujonoja tarvitaan lähes kaikkialla, ja jopa yksikkövälillä $[0, 1]$ on äärettömän monta pistettä. Derivaatta määritellään erotusosamäärän raja-arvona, ja raja-arvo puolestaan äärettömän lähestymisen avulla.

Finitistit siis pelaavat "varman päälle". He hyväksyvät vain sellaisen matematiikan joka on ihan satavarmasti pätevää, mutta samalla he pelaavat liian varman päälle: He menettävät modernin matematiikan äärettömyyksiä koskevat tulokset. Finitismi ei siis selitä sitä, kuinka on mahdollista, että matemaatikot kuitenkin pystyvät käytännössä täysin ongelmattomasti käsittelemään äärettömyyksiä.

6.6 Intuitionismi

Mitä matemaatikot tekevät työkseen? He ajattelevat matemaattisia olioita ja mielessään todistavat niille tuloksia. Intuitionistisen koulukunnan filosofit lähtevät liikkeelle tästä. Intuitionismin mukaan matematiikassa on kyse matemaatikkojen ajatuksista, niin sanotuista mentaalisista konstruktioista.

Ajattele mielessäsi joukot $A = \{a, b, c\}$ ja $D = \{d, e\}$. Ajattele seuraavaksi funktiota $f\colon A \to D$; $f(a) = f(b) = d, f(c) = e$. Hyvä. Suoritit juuri mentaalisen konstruktion. Konstruoit funktion f. Katso sitten, onko funktion f kuvajoukko sama kuin D. Hyvä. Konstruoit juuri todistuksen sille, että f on surjektio.

Tällaista on intuitionistin mielestä matematiikka. Intuitionistit eivät kuitenkaan vaadi, että matemaatikoiden on oltava muistihirviöitä, vaan he sallivat kynän ja paperin käytön muistin tukena, joten paperilla laskeminen on intuitionistillekin mahdollista.

Intuitionistit suhtautuvat vakavasti ajatukseen, että mieli kykenee hahmottamaan vain äärellisiä asioita. Kuitenkin intuitionistit sallivat jonkun verran äärettömiä matemaattisia olioita, mutta eivät niin paljoa kuin platonistit/formalistit/fiktionalistit. Intuitionistille äärettömät matemaattiset oliot ovat nimittäin sellaisia, joiden konstruktiota voi halutessaan jatkaa niin pitkälle kuin haluaa.

Tutkitaan esimerkiksi lukujonoa $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $x_i = 1/2^i$. Intuitionistille tämä lukujono on täysin kelvollinen, koska luetteloa $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, \ldots$ voi jatkaa niin pitkälle kuin haluaa. Se, että luetteloa jatkaessa paperi loppuu jossain vaiheessa universumista ei ole intuitionistille periaatteellinen este; konstruktioita tekevällä matemaatikolla intuitionistit yleensä tarkoittavat jonkunlaista idealisoitua matemaatikkoa, joka kykenee hahmottamaan pelkästään äärellistä, mutta kuitenkin kuinka suurta äärellistä tahansa.

Siinä missä platonisti puhuu olemassaolevista matemaattisista olioista, intuitionisti puhuu konstruoiduista matemaattisista olioista. Tämä tarkoittaa sitä, että intuitionisti saa operoida vain sellaisilla matemaattisilla olioilla, jotka hän on konstruoinut mentaalisesti, tai väljemmin, joista on osoitettu, että ne olisi periaatteessa mahdollista konstruoida mentaalisesti.

Siinä missä platonisti puhuu tosista matemaattisista väitteistä, intuitionisti puhuu todistetuista matemaattisista väitteistä. Intuitionisti saa olettaa todeksi vain sellaiset matemaattiset väitteet, jotka on todistettu.

Viimeksi mainitut kaksi seikkaa saavat intuitionistin ja platonistin mieltämään alkeislogiikan eri tavoin. Tutkitaan esimerkiksi väitettä ”A tai ei-A”. Platonistin mielestä tämä on tosi väite. A on nimittäin tosi tai epätosi. Jos A on epätosi, ei-A on tosi. Joka tapauksessa siis toinen lauseista A ja ei-A on tosi, joten väite ”A tai ei-A” on väistämättä tosi.

Jotta ”A tai ei-A” olisi intuitionistin mielestä todistettu, pitäisi joko A:n tai ei-A:n olla todistettu. Jälkimmäisen todistaminen tarkoittaisi ristiriidan johtamista A:sta. On kuitenkin täysin mahdollista, että kumpaakaan näistä todistuksista ei ole tehty, ja on myös täysin mahdollista, että kumpaakaan näistä todistuksista ei ole edes periaatteessa mahdollista tehdä, joten intuitionistin mielestä ”A tai ei-A” ei ole samalla tavalla väistämättä tosi lause kuin platonistin mielestä.

Nämä kaksi piirrettä, äärettömien matemaattisten olioiden hyväksyminen vain siinä tapauksessa, että ne on mahdollista konstruoida, ja platonistia heikompi alkeislogiikka aiheuttavat sen, että intuitionistit eivät hyväksy suurta osaa nykymatematiikan tuloksista. Intuitionismin suurin ongelma onkin se, että intuitionistisesti oikeaoppinen matematiikka on mopo: Siinä voidaan todistaa vähemmän kuin platonistin matematiikassa, ja todistukset ovat vielä usein työläämpiä.

6.7 Loppusanat

Filosofiassa harvoin on lopullisia vastauksia. Kaikilla yllämainituilla koulukunnilla on vahvuutensa ja heikkoutensa, ja jokaista ovat kannattaneet ihan järkevätkin ihmiset. Fiktionalismia lukuunottamatta kaikki yllämainitut koulukunnat ovat jo vanhoja ja vakiintuneita, ja uusiakin tulokkaita koulukunniksi on, vaikkei niitä olekaan tässä käyty läpi.

Itse olen nykyään taipuvainen kannattamaan fiktionalismia. Syy tähän on se, että fiktionalismi ja platonismi ovat ne kaksi koulukuntaa, jotka parhaiten vastaavat sitä, mitä matemaatikot oikeasti tekevät, ja fiktionalismilla on platonismia vähemmän ontologista (eli olemassaoloa koskevaa) painolastia.

Intuitionismi on idealtaan kiehtova, matematiikka ja matemaatikon mieli ovat perustavalla tavalla kytköksissä toisiinsa. Kuitenkin kaikkein mielenkiintoisinta matematiikkaa on mielestäni juuri se monimutkaisilla äärettömyyksillä pelaava matematiikka, jota intuitionismi ei hyväksy. Ja intuitionistien vastaväitteistä huolimatta sellaistakin matematiikkaa onnistutaan tekemään ilman, että ongelmia käytännössä esiintyy.

6.8 Kirjallisuutta

- Benacerraf ja Putnam [5]. Tämä on kattava kokoelma 1900-luvun tärkeimpiä artikkeleita matematiikanfilosofiasta.
- Balaguer [6]. Tämä on suosikkikirjani matematiikanfilosofiasta, ja tämän kirjoitelman luvussa Fiktionalismi esittämäni Balaguerin fiktionalismi perustuu tähän kirjaan.
- Heyting [7]. Kirjassa kehitetään perusmatematiikkaa intuitionistisista lähtökohdista käsin.

Luku 7

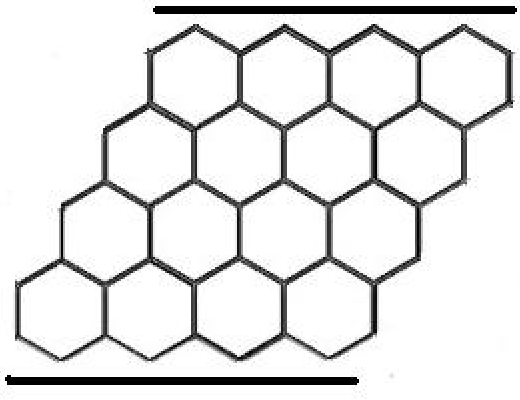
Hex-pelin matematiikkaa

7.1 Johdanto

Hex on kahden pelaajan strategiapeli, jonka ovat keksineet toisistaan riippumatta matemaatikot Piet Hein ja taloustieteen Nobelinkin saanut John Nash[1]. Peli on siitä mielenkiintoinen, että sitä on mahdollista analysoida matemaattisesti aika pitkälle, mutta ei kuitenkaan niin pitkälle, että käytännön pelaaminen olisi orjallista kaavojen seuraamista.

Tässä kirjoitelmassa esittelemme Hexin ja todistamme muutaman peliä koskevan teoreeman. Esityksemme perustuu osin teokseen Browne [3].

[1] Anekdootin mukaan Nashin keksimänä peli tunnettiin nimellä *John* (englanninkielinen slangi-ilmaus vessalle), koska pelilauta muistuttaa vessan lattian laatoitusta.



Kuva 7.1: 4×4-lauta

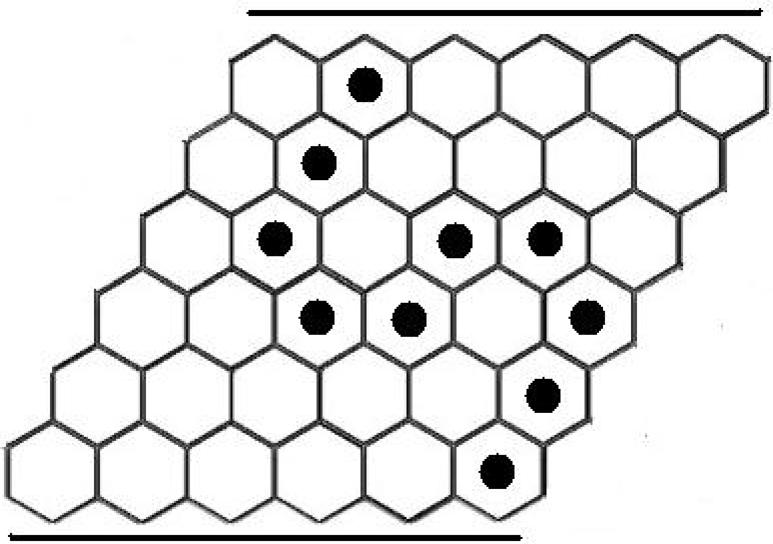
7.2 Hexin säännöt

Hexiä pelataan timantinmuotoisella pelilaudalla, jolla on kuusikulmioista koostuva ruudutus (nk. heksaruudutus). Kaksi vastakkaista pelilaudan sivua on merkitty mustiksi ja toiset kaksi vastakkaista sivua valkoisiksi. (Katso kuva 1.) Piet Hein suositteli peliin 11×11 kuusikulmiosta eli *heksasta* koostuvaa lautaa, joka on nykyisin yleisimmin käytetty ja John Nash puolestaan 14×14 heksasta koostuvaa lautaa. Allekirjoittaneen suosikkikoko on 13×13.

Toinen pelaaja pelaa mustilla pelinappuloilla ja toinen valkoisilla. Pelinappuloita oletetaan olevan tarpeeksi niin, että ne eivät voi loppua kesken.

Peli alkaa tyhjältä laudalta. Vuorollaan pelaaja asettaa yhden uuden omanvärisensä pelinappulan johonkin pelilaudan vapaaseen kuusikulmioon.

Pelin voittaa se pelaaja, joka saa yhdistettyä omanvärisensä pelilaudan sivut omanvärisistä, vierekkäisissä heksoissa sijaitsevista nappuloista koostuvalla nappulaketjulla. Voittava ketju saa mutki-



Kuva 7.2: Mustan voittopolku. Ylä- ja alalaidat on yhdistetty.

tella kuinka paljon tahansa, kunhan se yhdistää sivut. (Katso kuva 2.) Laudan kulmaheksojen katsotaan kuuluvan kumpaankin viereiseen sivuun.

7.3 Täyden informaation pelit

Tarkoitamme täyden informaation pelillä lauta- tai vastaavaa peliä, joka toteuttaa kaikki seuraavat ehdot:

- Pelissä ei ole satunnaisuutta (kuten nopanheittoa).
- Pelissä ei ole tietoa, jonka vain osa pelaajista tietäisi (kuten pelaajan kädessä olevat kortit.)

- Pelaajat tekevät siirrot vuorotellen. (Pelissä ei siis ole kivi-sakset-paperi -pelin tyyppistä yhtaikaista siirtojen valitsemista.)

Siis esimerkiksi shakki, go ja hex ovat täyden informaation pelejä.

Voittostrategialla tarkoitamme menetelmää, jota seuraamalla pelin voittaa varmasti. Tasapelistrategia tarkoittaa strategiaa, jota seuraamalla saa aikaan varmasti joko voiton tai tasapelin.

Voidaan todistaa seuraava teoreema. Todistus jätetään vaikeahkoksi harjoitustehtäväksi. Tehtävää tosin kannattaa yrittää vasta siinä vaiheessa, kun on lukenut tämän kirjoitelman loppuun ja saanut jonkunlaisen kuvan siitä, kuinka tällaisia asioita voidaan todistaa.

Teoreema 1 *Äärellisessä, kahden pelaajan täyden informaation pelissä jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia.*

Shakki on äärellinen peli, koska shakissa on sääntö, jonka mukaan peli on tasapeli, kun laudan asema on toistunut kolme kertaa. Näin ollen meillä on tulos, jonka mukaan shakissakin jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. Ei kuitenkaan tiedetä, mikä kyseisistä vaihtoehdoista pätee. On myös mahdollista (ja jopa luultavaa), että kyseiset strategiat ovat niin monimutkaisia, että ihmiset eivät koskaan tule tuntemaan niitä.

Edellisen tuloksen nojalla myös Hexissä jommalla kummalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. Hexistä tiedetään kuitenkin hiukan enemmänkin, ja tätä käsittelemme seuraavassa luvussa.

Teoreemalle saadaan helposti seuraava korollaari:

Korollaari 2 *Jos edellisessä teoreemassa peli ei voi päättyä tasapeliin, jommalla kummalla on voittostrategia.*

Huomautamme, että pelin äärellisyysehto on myös olennainen. On olemassa monimutkaisia joukko-opillisia kahden pelaajan täyden informaation pelejä, jotka toteuttavat seuraavat kaikki ehdot:

- Pelissä tehdään yhteensä ääretön jono siirtoja ja voittaja ratkaistaan tällaisen äärettömän siirtojonon perusteella.
- Jokainen peli päättyy jomman kumman pelaajan voittoon.
- Kummallakaan ei ole voittostrategiaa.

Jos tässä pelaajat ovat A ja B, jokaiselle A:n strategialle löytyy siis B:n strategia, joka voittaa sen, ja jokaiselle B:n strategialle löytyy A:n strategia, joka voittaa sen.

7.4 Hexin perustulokset

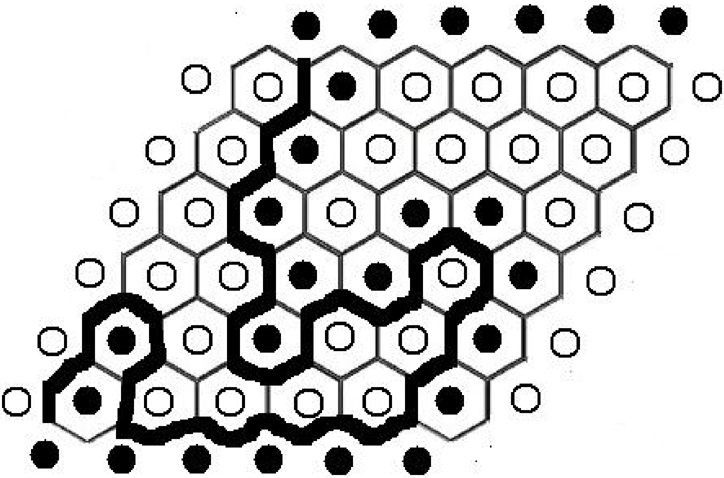
Tässä luvussa todistamme, että Hex-peli ei voi päättyä tasapeliin. Itse asiassa todistamme vahvemman tuloksen, jonka mukaan täyteen pelatulla laudalla toisella ja vain toisella pelaajalla on voittopolku. Todistamme myös, että Hexissä voittostrategia on pelin aloittajalla. Tämä tulos on kuitenkin teoreettinen olemassaolotulos, ja käytännön voittostrategiaa ei tunneta.

Teoreema 3 *Hex-peli ei voi päättyä tasapeliin.*

Todistus: Oletetaan, että lauta on pelattu täyteen. Osoitamme, että tässä tilanteessa toisella ja vain toisella pelaajalla on voittava nappulaketju. Teknisistä syistä oletamme, että myös laudan ulkopuolella on nappuloita, mustien sivujen vieressä mustia ja valkoisten sivujen vieressä valkoisia.

Oletetaan, että ala- ja yläsivut ovat mustia ja oikea ja vasen sivu valkoisia.

Muodostamme tässä todistuksessa polun, joka kulkee heksojen välisiä reunaviivoja pitkin niin, että kaikissa kohdissa polun vasemmalla puolella on valkea nappula ja polun oikealla musta nappula. Tässä siis oikea ja vasen määritellään suhteessa polkua kulkevaan henkilöön. Huomautamme, että jos olemme muodostaneet polkua n



Kuva 7.3: Vahvennettuna polku, joka konstruoitiin Teoreeman 3 todistuksessa.

askelta ja tulleet kolmen heksan leikkauspisteeseen, voimme aina jatkaa polkua. Jos edessä on valkea nappula, jatkamme polkua oikealle ja jos edessä on musta nappula, jatkamme polkua vasemmalle.

Aloitamme polun laudan vasemmasta alanurkasta. Jos siinä on valkoinen nappula, aloitamme sen alapuolelta (tällöin aloituspisteen alla on musta nappula laudan ulkopuolella), ja jos siinä on musta nappula, aloitamme sen vasemmalta puolelta (jolloin sen vasemmalla puolella on valkea nappula laudan ulkopuolella). Jatkamme polkua kunnes törmäämme laudan ylä- tai oikeaan laitaan. Edellisen kappaleen perusteella polkua voidaan jatkaa näin. Jos törmäämme laudan ylälaitaan, polun oikealla puolella on voittava musta ketju, ja jos törmäämme oikeaan laitaan, polun vasemmalla puolella on voittava valkea ketju. Siis jommalla kummalla pelaajalla on voittava ketju. (Polusta katso kuva 3).

Polkumme tosiaan päätyy lopulta joko oikeaan tai ylälaitaan. Se ei nimittäin voi päättyä silmukkaan, koska tällöin silmukan lopussa olisi vääränvärisiä nappuloita polun oikealla tai vasemmalla puolen.

Perustelemme vielä sen, että polun toisella puolella on tosiaan voittava ketju. Oletetaan, että törmäsimme ylälaitaan. (Jos törmäsimme oikeaan laitaan, todistus menee samoin.) Jokaisen polkuun kuuluvan heksan sivun oikealla puolella on musta pelinappula. Koska kahdella peräkkäisellä polkuun kuuluvalla heksan sivulla on yhteinen kärki, yhteinen kärki on myös niillä peräkkäisillä heksoilla, joissa on mustat pelinappulat. Kyseisillä heksoilla on myös yhteinen sivu, koska heksalaudalla kahdella heksalla on yhteinen sivu, jos niillä on yhteinen kärki. Siis edellämainittu musta ketju koostuu heksoista, joista kahdella peräkkäisellä on aina yhteinen sivu, joten kyseessä on voittoketju.

Lisäksi havaitsemme, että voittava ketju jakaa pelilaudan kahtia niin, että tilanne, jossa kummallakin on voittava ketju on mahdoton.□

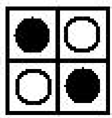
Todistuksessa mainitut seikat tarkoittavat sitä, että ainoa keino blokata vastustaja Hex-pelissä on muodostaa oma voittava ketju. Käytännön pelissä tämä tarkoittaa sitä, että Hexissä hyökkääminen (oman ketjun muodostaminen) ja puolustaminen (vastustajan estäminen) ovat yksi ja sama asia.

Todistuksemme käytti olennaisesti hyväkseen sitä, että lautamme on heksalauta. Tätä käytetään hyväksi siinä vaiheessa, kun todetaan, että polun jommalla kummalla puolella on voittava ketju. Neliöruuduista koostuvalla laudalla olisi mahdollista tehdä nk. ristileikkaus (kuva 4), joka estäisi voittavan ketjun syntymisen.

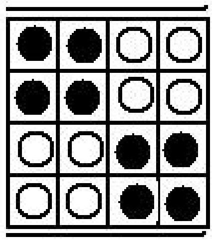
Ristileikkauksen avulla on mahdollista tehdä neliöruuduilla pelattavalle Hex-pelille tasapelitilanne, joka on esitetty kuvassa 5.

Teoreema 4 *Hex-pelissä ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia.*

Todistus: Oletetaan, että toisena pelaavalla on voittostrategia S



Kuva 7.4: Ristileikkaus.



Kuva 7.5: Ruutulaudalla Hex voi päättyä tasapeliin.

ja johdetaan ristiriita. Ensimmäisenä pelaava muodostaa strategian S' joka on muutoin sama kuin S, mutta siinä mustan ja valkoisen roolit on vaihdettu, ja lautaa on peilattu jomman kumman lävistäjän suhteen niin, että sivujen väritykset vastaavat uusia pelaajien rooleja.

Nyt ensimmäisenä pelaava voi pelata seuraavasti: Hän tekee ensimmäisen siirron mielivaltaisesti. Tämän jälkeen hän pelaa strategialla S' kuvitellen, ettei ole tehnyt ensimmäistä siirtoaan. Jos hänen jossain kohti peliä täytyy tehdä S':n mukaan ensimmäinen siirtonsa, hän lakkaa kuvittelemasta, ettei ole tehnyt ensimmäistä siirtoaan, tekee mielivaltaisen siirron ja kuvittelee jatkossa, ettei ole tehnyt uutta mielivaltaista siirtoaan. Jos hänen täytyy myöhemmin tehdä S':n mukaan se siirto, jota hän ei kuvittele tehneensä, hän lakkaa kuvittelemasta...

Koska S on voittostrategia, sitä on myös S'. Koska siitä siirrosta, jota ensimmäinen pelaaja ei kuvittele tehneensä, ei ole ensimmäisenä pelaavalle missään tilanteessa haittaa, ensimmäisenä pelaava voittaa. Ristiriita sen kanssa, että toisena pelaavalla on voittostrategia.

Koska kyseessä on äärellinen peli, joka ei voi päättyä tasapeliin, jommalla kummalla on voittostrategia. Koska edellisen argumentin nojalla toisena pelaavalla ei ole voittostrategiaa, voittostrategia on ensimmäisenä pelaavalla.□

Samanlaisella argumentilla voidaan näyttää, että missä tahansa äärellisessä kahden pelaajan täyden informaation pelissä, joka ei voi päättyä tasapeliin, jossa pelaajien roolit ovat symmetriset eikä siirrosta ole missään tapauksessa siirron tekijälle haittaa, on ensimmäisenä pelaavalla voittostrategia. Jos muut ehdot pätevät, mutta peli voi päättyä myös tasapeliin, samanlaisella argumentilla voidaan näyttää, että joko ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia tai peli päättyy optimaalisella pelillä tasapeliin.

Tässä on huomattava, että ensimmäisen pelaajan voittostrategia olemassaolon todistaminen on puhdas olemassaolotodistus: Se kertoo, että ensimmäisenä pelaavalla on voittostrategia, mutta se ei mitään siitä, *millainen* tuo voittostrategia on. Hexin tapauksessa sitä ei tiedetäkään, joten käytännön pelaaminen on mielekästä.

7.5 Reilun pelin aikaansaaminen

Kuten edellisessä luvussa totesimme, ensimmäisenä pelaavalla on teoreettinen etu. Pelikokemus on osoittanut, että ensimmäisenä pelaavalla on huomattava etu myös käytännön peleissä. Tämän johdosta Hex-pelin alussa käytetääkin nk. kakunleikkaussääntöä (englanniksi *pie rule*), joka toimii seuraavasti:

- Ensimmäisenä pelaava tekee mustilla aloitussiirron.
- Tämän jälkeen toisena pelaava valitsee, pelaako hän mustilla vai valkoisilla.
- Tämän jälkeen peli jatkuu valkean pelaajan siirrolla ja sen jälkeen normaalisti vuorotellen värejä.

Tätä protokollaa noudattaen ensimmäisen mustan siirron ei kannata olla liian hyvä, vaan sellainen, että kummallakin siirron jälkeen suunnilleen yhtä hyvät voitonmahdollisuudet. Kakunleikkaussääntö onkin saanut nimensä operaatiosta, jossa jaetaan kakku kahteen osaan niin, että ensimmäinen ruokailija leikkaa kakun kahtia ja toinen ruokailija valitsee kumman osan ottaa. Toinen osa jää halkaisijalle.

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että käytettäessä Hexissä kakunleikkaussääntöä on toisena pelaavalla teoreettinen voittostrategia.

Jos toinen pelaajista on heikompi, ei kakunleikkaussääntöä yleensä käytetä, vaan heikompi pelaaja yksinkertaisesti aloittaa pelin. Hänellä on teoreettinen etu, ja myös jonkunasteinen käytännön etu. Koska voittostrategiaa ei tunneta, ei etu ole paremmalle pelaajalle ylitsepääsemätön.

Voisi olla houkutteleva idea antaa heikommalle pelaajalle tasoitusta niin, että hän pelaa ylä- ja alalaitoja yhdistäen, ja lauta on tässä suunnassa kapeampi. Tämä idea ei kuitenkaan toimi, koska tällöin on olemassa tunnettu voittostrategia.

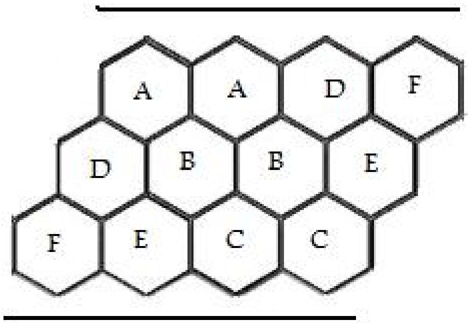
Teoreema 5 *Oletetaan, että meillä on Hex-lauta, joka on pystysuunnassa* $n-1$ *heksan kokoinen ja vaakasuunnassa* n *heksan kokoinen. Tällöin ylä- ja alalaitoja yhdistävällä pelaajalla on tunnettu voittostrategia, vaikka hän pelaisi toisena.*

Todistus: Merkitään laudan heksat kirjaimilla kuten kuvassa 6.

Oletetaan, että ylä- ja alalaitoja yhdistävä pelaa toisena.

Nyt toisena pelaavan voittostrategia on se, että hän pelaa aina heksaan, missä on sama kirjain kuin vastustajan edellisenä pelaamassa heksassa. Todistamme, että tämä on voittostrategia.

Oletetaan, että toinen pelaaja pelaa tällä strategialla, ja tehdään vastaoletus, että ensimmäisenä pelaavalla on voittava ketju P. Oletamme, että ketju alkaa vasemmasta laidasta ja päättyy oikeaan laitaan. Voidaan olettaa, että voittoketju on minimaalinen niin, että se ei leikkaa itseään. Olkoon h ketjun ensimmäinen heksa, jossa ketju käy joidenkin oikeanpuoleisten heksojen A, B tai C kautta. Olkoon



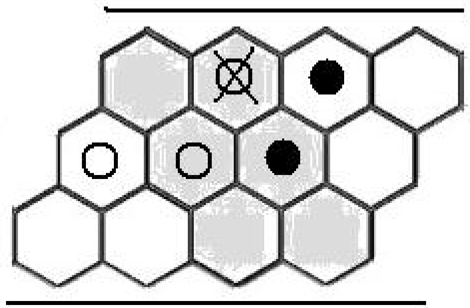
Kuva 7.6: Ylä- ja alasivuja yhdistävän voittostrategia.

h' ketjun edellinen heksa. Koska h:ssa ja h':ssa ei voi olla samaa kirjainta, on h yläviistoon h';sta. Olkoon h' ketjun m:s nappula ja Q ketjun m ensimmäistä nappulaa. Olkoon R toisen pelaajan vastaukset Q:ta edustaviin siirtoihin ylläkuvaillulla voittostrategialla. Nyt Q ja R muodostavat "pussin", jonka sisälle h jää, eikä voittoketju voi edetä maaliinsa kulkematta sellaisen heksan läpi, jossa on R:n nappula (mikä on mahdotonta sääntöjen perusteella) tai Q:n nappula (mikä on mahdotonta, koska oletimme, ettei voittoketju leikkaa itseään.) (Pussi on kuvattu kuvassa 7.)

Siis ensimmäisenä pelaavalla ei voi olla voittoketjua. Koska peli ei voi päättyä tasapeliin, toisena pelaava voittaa, joten hänen strategiansa on voittostrategia.

Vaikka olemme yllä käsitelleet 4×3 lautaa, nähdään helposti, että annettu argumentti yleistyy kaikille laudan koille $n \times (n-1)$. $\square$

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että sama pätee myös siinä tapauksessa, että pysty- ja vaakasuuntien kokojen ero on enemmäin kuin 1, sekä se, että sama pätee myös silloin, kun ylä- ja alalaitoja yhdistävä pelaaja aloittaa pelin.



Kuva 7.7: Musta on pelannut valkean rastilla merkityn nappulan pussiin.

7.6 Mistä pelivälineet?

Siltä varalta, että lukijalle iski kipinä päästä pelaamaan, selitämme tässä luvussa, kuinka hankkia pelivälineet. Hex-settejä ei käsittääkseni myydä missään, joten pelivälineet joutuu valmistamaan itse.

Roolipelivälineitä myyvät kaupat myyvät tuotetta nimeltä Battle Mat. Se on ohut vinyylilauta, jossa on toisella puolella tavallinen ruudutus ja toisella puolella heksaruudutus. Siitä on helppo leikata halutun kokoinen Hex-lauta. Suomessa Battle Matia myy mm. Fantasiapelit (`http://www.fantasiapelit.fi`). Hex-nappuloina voidaan käyttää Go-pelin pelinappuloita eli ”kiviä”, joita Suomessa myy Gaimport (`http://www.kolumbus.fi/gaimport/`). Onnekkaan yhteensattuman ansiosta Battle Mat, jossa on yhden tuuman kokoiset heksat on juuri oikean kokoinen standardeille Go-kiville.

Koska Hexissä nappuloita ei koskaan siirretä tai poisteta laudalta, sitä voi pelata myös kynällä ja paperila. Tähän tarkoitukseen lautoja voi tulostaa Hex Wikistä (`http://hexwiki.amecy.com/index.php/Printable_boards`).

Internetissä Hexiä voi pelata esimerkiksi Little Golemissa (www.littlegolem.net) kirjepelin tahtiin. Little Golem tarjoaa 13×13 ja 19×19 -lautakoot.

7.7 Pähkinöitä

1. Olkoon P äärellinen, kahden pelaajan täyden informaation peli, jossa tasapeli on mahdoton. Oletetaan, että P:ssä on kakunleikkaussääntö ensimmäisen siirron jälkeen. Osoita, että toisena pelaavalla on voittostrategia. (Voit olettaa tunnetuksi, että kaikissa kahden pelaajan äärellisissä täyden informaation peleissä, joissa tasapeli ei ole mahdollinen, on jommalla kummalla pelaajalla voittostrategia.)

2. Oletaan, että Hexissä laudan pystykoko on pienempi kuin vaakakoko, ja ylä- ja alalaitoja yhdistävä pelaa toisena. Konstruoi ylä- ja alalaitoja yhdistävälle voittostrategia.

3. Sama kuin edellä, mutta ylä- ja alalaitoja yhdistävä aloittaa pelin.

4. Teoreeman 5 todistuksessa oletettiin, että voidaan valita voittoketju, joka ei leikkaa itseään. Osoita, että tämä on mahdollista. Osoita siis, että jos P' on voittoketju, joka leikkaa itseään, P':n sisällä on voittoketju P, joka ei leikkaa itseään.

5. Oletetaan, että meillä on äärellinen kahden pelaajan täyden informaation peli, jossa voitto ja tasapeli riippuvat vain laudan loppuasemasta (eikä kuten esim. shakissa, jossa tasapeli syntyy laudan aseman toistuessa kolme kertaa, jolloin tasapeli riippuu paitsi loppuasemasta, myös laudan edeltävistä tiloista.) Osoita, että jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. (Vihje: Induktio laudan mahdollisista loppuasemista taaksepäin.)

6. Osoita, että kaikissa kahden pelaajan äärellisissä täyden informaation peleissä jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia tai kummallakin on tasapelistrategia. (Vihje: Muokkaa edellisen kohdan ratkaisua.)

Luku 8

Yhtenäisyydestä

8.1 Johdanto

Tarkastellaan kuvassa 1 näkyviä verkkoa[1] ja $\mathbb{R}^2$:n (eli tason) osajoukkoa. Niillä on yhteinen ominaisuus: Ne ovat kumpikin yhtenäisiä. Kaikki verkot ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukot eivät ole yhtenäisiä. Esimerkiksi Kuvassa 2 oleva verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko koostuvat kumpikin kolmesta yhtenäisestä komponentista.

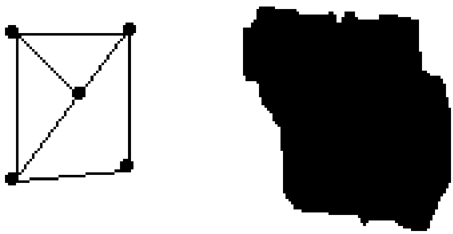
Kuvan 2 verkko voidaan jakaa kolmeen osaan niin, että osien välillä ei ole verkon kaaria, ja kuvassa 2 näkyvä $\mathbb{R}^2$:n osajoukko voidaan puolestaan jakaa kolmeen osaan niin, että osat ovat kaukana toisistaan. Kuvan 1 objekteilla ei vastaavaa ominaisuutta ole.

Sekä verkkojen yhtenäisyyttä että $\mathbb{R}^2$:n osajoukkojen yhtenäisyyttä kuvaavat teoriat ovat hyvin tunnettuja.

Matemaattista mieltä kiinnostaa kuitenkin kysymys: Onko ver-

[1] Verkko koostuu solmuista, sekä kaarista, joista jokainen yhdistää kaksi solmua. Suuntaamattomassa verkossa jokaista solmuparia yhdistää korkeintaan yksi kaari. Suunnatussa verkossa jokaiselle kaarelle on määritelty suunta, eli kaarella on alku- ja loppusolmut, ja solmuparin välillä voi olla kaksi eri suuntiin kulkevaa kaarta. Tässä kirjoitelmassa verkot ovat suuntaamattomia, jos muuta ei mainita.

Kuva 8.1: Yhtenäinen verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.



Kuva 8.2: Epäyhtenäinen verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.

kon ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyydellä (ja vastaavasti yhtenäisillä komponenteilla) jotain yhteistä? Toisin sanoen, onko olemassa yleistä yhtenäisyyden määritelmää, josta seuraisi erikoistapauksina sekä verkon että $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyys?

Paljastuu, että tällainen teoria on olemassa, ja se kehitettiin 1900-luvun alkupuolella, joskin nykyään se on painunut suurelta osin unholaan. Se löytyy teoksesta Čech[4], luvuista 14 ja 20. Esitämme sen alla huomattavasti mukaillen.

Esitämme teorian todistuksineen. Matemaattisen tekstin lukemiseen tottumattomat lukijat voivat sivuuttaa todistukset ja vain uskoa tulokset. Niitä lukijoita varten, jotka eivät tunne joukko-opin notaatioita, liitteessä on todellinen crash course aiheesta.

8.2 Lähipisteavaruus

Tutkitaan $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoa $A = \{(x, 0) \mid 0 < x < 1\}$. Sillä on sellainen ominaisuus, että pisteet $(0, 0)$ ja $(1, 0)$ eivät kuulu kyseiseen joukkoon, mutta kuitenkin ovat lähellä joukkoa A. Vastaavasti, jos B on verkon solmujen joukon osajoukko, voidaan ajatella, että solmu on lähellä joukkoa B, jos solmusta on kaari johonkin joukon B solmuun.

Sekä verkon että $\mathbb{R}^2$:n osajoukon rakenne voidaan siis ilmaista läheisyyden avulla: Kerrotaan, mitkä pisteet ovat lähellä mitäkin tutkittavan olion osajoukkoa. Seuraavaksi aksiomatisoimmekin lähelläolemisrelaation, eli annamme sellaisen lähelläolemisen määritelmän, että sitä voidaan soveltaa sekä verkkoihin että $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoihin. Seuraavat ominaisuudet tuntuvat luonnollisilta lähelläolemisen ominaisuuksilta.

- Jos x kuuluu joukkoon A, niin se on lähellä joukkoa A.
- Mikään piste ei ole lähellä tyhjää joukkoa.
- Jos $A \subset B$, ja piste x on lähellä joukkoa A, niin x on myös lähellä joukkoa B.

Itse asiassa ilmenee, että nämä ominaisuudet ovat riittäviä sen teorian kehittämiseen, minkä teemme tässä kirjoitelmassa.

Nyt muodollinen määritelmä:

Olkoon X joukko. Merkitään $\mathcal{P}(X)$:llä kaikkien X:n osajoukkojen[2] joukkoa.

Pari $(X, \bar{\in})$ on *lähipisteavaruus*, jos X on joukko ja $\bar{\in}$ on relaatio $\bar{\in} \subset X \times \mathcal{P}(X)$, joka toteuttaa seuraavat aksioomat:

1. Jos $A \subset X$ ja $a \in A$, niin $a \bar{\in} A$.
2. $x \bar{\in} \emptyset$ ei päde millään $x \in X$.
3. Jos $A \subset B \subset X$ ja $x \in X$, jolle $x \bar{\in} A$, niin tällöin $x \bar{\in} B$.

Jos $x \bar{\in} A$, sanomme, että x on joukon A lähipiste. Jos $A \subset X$, merkitään $\operatorname{cl} A = \{x \in X \mid x \bar{\in} A\}$.

Seuraavaksi selitämme, kuinka verkot ja tason osajoukot voidaan mieltää lähipisteavaruuksina.

Olkoon (X, S) verkko, missä X on solmujen joukko ja S kaarien joukko. Määritellään, että jos $x \in X$ ja $A \subset X$, niin x on joukon A lähipiste, $x \bar{\in} A$, jos $x \in A$ tai solmusta x on kaari johonkin joukon A solmuun. Kiinnostunut lukija voi helposti tarkistaa, että antamamme lähipisteen määritelmä verkossa toteuttaa kaikki lähipisterelaation aksioomat. Nyt verkko (X, S) voidaan mieltä lähipisteavaruutena $(X, \bar{\in})$.

Olkoon sitten $X \subset \mathbb{R}^2$. Jos $x, y \in X$, merkitään $d(x, y)$:llä pisteiden x ja y etäisyyttä (linnuntietä). Jos $A \subset X$ ja $x \in X$, sanomme, että x on joukon A lähipiste, $x \bar{\in} A$, jos kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla $\epsilon > 0$ on olemassa $y \in A$, jolle $d(x, y) < \epsilon$. Kiinnostunut lukija voi tarkistaa, että antamamme lähipisteen määritelmä toteuttaa kaikki lähipisteavaruuden aksioomat. Nyt X voidaan mieltää lähipisteavaruutena $(X, \bar{\in})$.

[2] Joukon X osajoukoiksi lasketaan myös joukot $\emptyset$ ja X.

Olkoon $X = \mathbb{R}^2$. Esimerkiksi joukon $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) < 1\}$ lähipisteiden joukko on $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) \leq 1\}$. Toisena esimerkkinä joukon $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) \leq 1\}$ lähipisteiden joukko on joukko A itse.

Jos $X \subset \mathbb{R}^2$, $(X, \bar{\in})$ toteuttaa vielä seuraavat ehdot:

- Kaikilla $A, B \subset X$ ja kaikilla $x \in X$ pätee $x \bar{\in} (A \cup B)$ jos ja vain jos $x \bar{\in} A$ tai $x \bar{\in} B$.
- Kaikilla $A \subset X$ pätee $\operatorname{cl}\operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$.

Nämä ehdot toteuttavia lähipisteavaruuksia kutsutaan topologisiksi avaruuksiksi, ja ne näyttelevät hyvin keskeistä roolia modernissa matematiikassa.

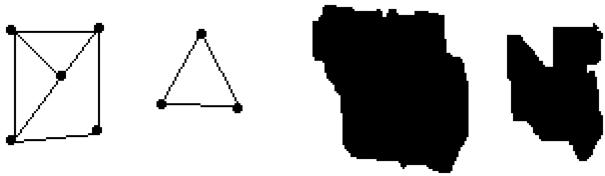
8.3 Yhtenäisyys

Tutkitaan kuvassa 2 esiintyviä verkkoa ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoa, jotka kumpikin koostuvat kolmesta komponentista. Laittamalla kaksi komponenttia yhteen lokeroon ja yksi komponentti toiseen lokeroon, havaitaan, että ne voidaan kumpikin jakaa kahteen erilliseen osaan (ja helposti havaitaan, että mistä tahansa yhtä suuremmasta komponenttimäärästä koostuva kokonaisuus voidaan aina jakaa kahteen osaan, mutta kahdesta komponentista koostuvaa kokonaisuutta ei voida jakaa useampaan kuin kahteen osaan). Kuvan 1 objekteilla, jotka ovat yhtenäisiä, ei tätä ominaisuutta ole. Näin ollen määrittelemmekin epäyhtenäisyyden käyttäen tätä ideaa:

Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus. Sanomme, että X on *epäyhtenäinen*, jos on olemassa $A, B \subset X$ siten, että seuraavat ehdot pätevät:

1. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.
2. $A \cap B = \emptyset$

Kuva 8.3: Kahdesta komponentista koostuva verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko



3. $A \cup B = X$.

4. $\operatorname{cl} A = A$ ja $\operatorname{cl} B = B$.

Viimeinen ehto voidaan ilmaista myös muodossa

- Jos $x \in B$, niin $x \bar{\in} A$ ei päde ja jos $x \in A$, niin $x \bar{\in} B$ ei päde.

Kyseinen ehto siis sanoo, että osien välillä ei vallitse lähipisterelaatioita.

Lukija voi helposti tarkistaa, että kuvan 3 verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko ovat epäyhtenäisiä tämän määritelmän mukaan. (Asian osoittamiseksi valitaan A:ksi ja B:ksi X:n yhtenäiset komponentit.)

Sanomme, että $(X, \bar{\in})$ on *yhtenäinen*, jos se ei ole epäyhtenäinen. Kuvassa 1 esitetyt verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko ovat tämän määritelmän mukaan yhtenäisiä.

8.4 Komponenttien määrä

Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus. Olkoon $A \subset X$. Nyt $(A, \bar{\in}_A)$ on lähipisteavaruus, kun $\bar{\in}_A \subset A \times \mathcal{P}(A)$ määritellään

$$x \bar{\in}_A B \text{ jos ja vain jos } x \bar{\in} B$$

kaikilla $B \subset A, x \in A$. Merkitään A:n sulkeumaoperaattoria cl_A, eli jos $B \subset A$, $\mathrm{cl}_A B$ on kaikkien niiden A:n pisteiden joukko, jotka ovat lähellä joukkoa B.

Ylläolevan määritelmän perusteella mitä tahansa X:n osajoukkoa voidaan käsitellä lähipisteavaruutena, joten minkä tahansa X:n osajoukon yhtenäisyydestä ja epäyhtenäisyydestä voidaan puhua.

Jos $A \subset X$, sanomme, että A on X:n *yhtenäinen komponentti*, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. A on yhtenäinen.
2. Jos $B \subset X$ on sellainen, että $A \subset B$, $A \neq B$, niin tällöin B on epäyhtenäinen.

Siis X:n yhtenäiset komponentit ovat X:n maksimaalisia yhtenäisiä osajoukkoja.

Tämän määritelmän nojalla kuvassa 2 on verkko ja $\mathbb{R}^2$:n osajoukko, joilla on kummallakin kolme yhtenäistä komponettia.

Seuraavaksi todistamme kaksi yhtenäisten komponenttien perustulosta. Ensinnäkin sen, että jokainen piste kuuluu johonkin yhtenäiseen komponenttiin sekä sen, että kahden yhtenäisen komponentin leikkaus on tyhjä. Aloitamme kuitenkin kahdella lemmalla, joista ensimmäistä käytämme jatkossa ilman eri viittausta.

Lemma 1 *Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus ja $B \subset X$ sellainen, että $\mathrm{cl}\, B = B$. Olkoon $A \subset X$. Tällöin $\mathrm{cl}_A(A \cap B) = A \cap B$.*

Todistus: Selvästi $A \cap B \subset \mathrm{cl}_A(A \cap B)$ ja $\mathrm{cl}_A(A \cap B) \subset A$. Siis täytyy todistaa $\mathrm{cl}_A(A \cap B) \subset B$.

Lähipisteavaruuden määritelmän ehdosta 3 seuraa, että jos $C \subset D$ niin $\mathrm{cl}\, C \subset \mathrm{cl}\, D$. Näin ollen $\mathrm{cl}_A(A \cap B) \subset \mathrm{cl}(A \cap B) \subset \mathrm{cl}\, B = B$.$\square$

Lemma 2 *Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus, ja $(C_i)_{i \in I}$ kokoelma X:n yhtenäisiä osajoukkoja siten, että on olemassa $x \in X$, jolle $x \in C_i$ kaikilla $i \in I$. Tällöin $\bigcup C_i$ on yhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus: $\bigcup C_i$ on epäyhtenäinen. Olkoon A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Symmetrian perusteella voidaan olettaa $x \in A$. Olkoon i sellainen, että $C_i \cap B \neq \emptyset$. Nyt $A \cap C_i$ ja $B \cap C_i$ ovat kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä joukolle C_i, joka on yhtenäinen. Ristiriita.$\square$

Korollaari 3 *Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus ja $x \in X$. Tällöin x kuuluu johonkin X:n yhtenäiseen komponenttiin.*

Todistus: Olkoon $(C_i)_{i \in I}$ kaikkien X:n yhtenäisten osajoukkojen kokoelma, jotka sisältävät x:n. Koska x:n yksiö $\{x\}$ on yhtenäinen, kokoelma on epätyhjä. Lemman 2 nojalla $\bigcup C_i$ on maksimaalinen yhtenäinen osajoukko, eli yhtenäinen komponentti.$\square$

Korollaari 4 *Jos C ja D ovat X:n yhtenäisiä komponentteja, $C \neq D$, niin $C \cap D = \emptyset$.*

Todistus: Tehdään vastaoletus, $C \cap D \neq \emptyset$. Joko $C \not\subset D$ tai $D \not\subset C$. Oletetaan symmetrian perusteella ensimmäinen. Nyt $C \cup D$ on Lemman 2 nojalla yhtenäinen, joten D ei ole maksimaalinen, eikä näin ollen yhtenäinen komponentti. Ristiriita.$\square$

8.5 Yhtenäiseksi todistaminen

Lähipisteavaruuksia voidaan todistaa epäyhtenäisiksi yksinkertaisesti löytämällä joukot A ja B, jotka ovat kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Yhtenäiseksi todistaminen on usein vaikeampaa, ja tässä luvussa esittelemme pari tulosta, joista yhtenäisyys tietyissä tapauksissa seuraa.

Aluksi esittelemme tuloksen, jonka avulla voidaan osoittaa verkon yhtenäisyys. Olkoon $(X, \bar{\in})$ verkkoa vastaava lähipisteavaruus ja $x \in X$. Merkitään $\mathrm{cl}\, x = \mathrm{cl}\{x\}$, ja $\mathrm{cl}^n\, x = \mathrm{cl}\,\mathrm{cl} \ldots \mathrm{cl}\, x$, missä sulkeumia otetaan n kappaletta.

Teoreema 5 *Olkoon* $(X, \bar{\in})$ *verkkoa vastaava lähipisteavaruus ja* $x \in X$. *Jos on olemassa* $n \in \mathbb{N}$, *jolle* $\operatorname{cl}^n x = X$, *niin* X *on yhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus: X on epäyhtenäinen. Olkoon A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Symmetrian perusteella voidaan olettaa $x \in A$. Määritellään jokaiselle $y \in X$ arvo $v(y)$ siten, että $v(y)$ on pienin luku m jolla $y \in \operatorname{cl}^m x$ (ja määritellään $v(x) = 0$). Olkoon $z \in B$ piste, jolla on pienin v-arvo joukon B pisteistä. Nyt pisteestä z on särmä johonkin sellaiseen pisteeseen z', jolle $v(z') = v(z) - 1$. Mutta $v(z)$:n mininaalisuuden perusteella $z' \in A$. Siis $z \in \operatorname{cl} A$. Ristiriita.$\square$

Seuraavaksi esittelemme tuloksen, josta seuraa aika monen $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyys. Aloitamme kuitenkin aputuloksilla.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Sanomme, että $x \in \mathbb{R}$ on joukon A yläraja, jos kaikilla $a \in A$ pätee $a \leq x$. Reaaliluvuilla on seuraava käyttökelpoinen ominaisuus: Jos $A \subset \mathbb{R}$ on epätyhjä ja joukolla A on yläraja, tällöin joukon A ylärajojen joukossa on pienin yläraja. Kutsumme joukon A pienintä ylärajaa joukon A *supremumiksi.*

Lemma 6 *Jokainen jana* $\mathbb{R}^2$*:ssa on yhtenäinen.*

Todistus: Olkoon J jana, jonka päätepisteet ovat x ja y. Kun $t \in [0, 1]$, merkitään $f(t) = ty + (1 - t)x$. Nyt $J = \{f(t) \mid t \in [0, 1]\}$. Tehdään vastaoletus: J on epäyhtenäinen. Olkoon A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Oletetaan symmetrian perusteella, että $x \in A$.

Olkoon t_0 supremum luvuista $t \in [0, 1]$, joille jana pisteestä x pisteeseen $f(t)$ sisältyy joukkoon A. Nyt mielivaltaisen lähellä $f(t_0)$:aa on joukon A pisteitä, joten $f(t_0) \in \operatorname{cl} A$, ja koska $A = \operatorname{cl} A$, $f(t_0) \in A$.

Jos $t_0 = 1$, pätee $J = A$ ja $B = \emptyset$, mikä on ristiriita. Siis $t_0 < 1$. Nyt mielivaltaisen lähellä $f(t_0)$:aa on joukon B alkoita, joten $f(t_0) \in$

$\mathrm{cl}\, B = B$. Siis $f(t_0) \in A \cap B$, ristiriita.$\square$

Olkoon $J_1, \ldots, J_n$ janoja siten, että kaikilla i, $i = 1, \ldots, n-1$, janan J_i loppupiste on janan J_{i+1} alkupiste. Tällöin kutsumme yhdistettä $\bigcup J_i$ *murtoviivaksi.*

Korollaari 7 *Murtoviiva on yhtenäinen.*

Todistus: Yhdestä janasta koostuva murtoviiva on yhtenäinen Lemman 6 perusteella. Useammasta janasta koostuva murtoviiva voidaan näyttää yhtenäiseksi induktiolla käyttäen Lemmaa 2.$\square$

Teoreema 8 *Olkoon $X \subset \mathbb{R}^2$ sellainen, että mitkä tahansa kaksi X:n pistettä voidaan yhdistää murtoviivalla joukon X sisällä. Tällöin X on yhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus: X on epäyhtenäinen. Olkoot A ja B kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä. Valitaan $x \in A$, $y \in B$. Olkoon M murtoviiva pisteestä x pisteeseen y. Mutta nyt $M \cap A$ ja $M \cap B$ ovat kuten epäyhtenäisyyden määritelmässä joukolle M. Siis M on epäyhtenäinen, mikä on ristiriita edellisen korollaarin kanssa. $\square$

Esimerkki 9 *Olkoon X annulus $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq d(x,0) \leq 2\}$. Nähdään helposti, että mitkä tahansa kaksi X:n pistettä voidaan yhdistää murtoviivalla joukon X sisällä. Siis X on yhtenäinen.*

8.6 Lopuksi

Olkoon X joukko. Sanomme, että $d\colon X \times X \to [0, \infty[$ on metriikka (eli etäisyysfunktio), jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $d(x,y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$.

2. Kaikilla $x, y \in X$ pätee $d(x,y) = d(y,x)$.

3. Kaikilla $x, y, z \in X$ pätee $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Huomataan, että tavallinen etäisyys (linnuntietä) missä tahansa $\mathbb{R}^n$:n osajoukossa on metriikka. Lisäksi missä tahansa metriikalla varustetussa joukossa X voidaan määritellä osajoukkojen lähipisteet samalla tavalla teimme sen $\mathbb{R}^2$:n osajoukoille. Metriikan avulla määritelty $\bar{\in}$ toteuttaa aina, paitsi lähipisteavaruuden aksioomat, myös topologisen avaruuden ehdot

- Kaikilla $A, B \subset X$ ja kaikilla $x \in X$ pätee $x \bar{\in} (A \cup B)$ jos ja vain jos $x \bar{\in} A$ tai $x \bar{\in} B$.
- Kaikilla $A \subset X$ pätee $\operatorname{cl} \operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$.

Tämän tuloksen perusteella saamme suuren joukon topologisia avaruuksia.

Yllä olemme havainneet, että topologisen avaruuden yhtenäisten komponenttien lukumäärä voidaan määritellä kun pelkästään tiedetään kaikkien osajoukkojen lähipisteet. On ehkä hiukan yllättävää, että se voidaan tehdä näin niukkojen tietojen varassa. Itse asiassa näin niukkojen tietojen varassa voidaan määritellä myös topologisen avaruuden reikien lukumäärä ja tyyppi, mutta se kuuluukin sitten algebralliseen topologiaan, jota käsitellään vasta yliopiston kursseilla, ja sielläkin vasta syventävillä vapaaehtoisilla kursseilla.

8.7 Pähkinöitä

1. Osoita, että Teoreemassa 5 annettu ehto (äärellisen) verkon yhtenäisyydelle on *jos ja vain jos* -ehto.
2. Olkoon (X, S) suunnattu verkko. Määritellään lähipisterelaatio $\bar{\in} \subset X \times \mathcal{P}(X)$, $x \bar{\in} A$ jos ja vain jos $x \in A$, tai on olemassa nuoli, jonka alkupiste on A:ssa ja loppupiste on x.

Määritetään $\mathrm{cl}'\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ siten, että kaikilla $A \subset X$ pätee $\mathrm{cl}' A = A \cup B$, missä B on niiden solmujen s joukko, joille on olemassa $s' \in A$ ja nuoli pisteestä s' pisteeseen s tai nuoli pisteestä s pisteeseen s'.

Olkoon $x \in X$, ja $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\mathrm{cl}'^n x = X$. Osoita, että $(X, \bar{\in})$ on yhtenäinen.

3. Olkoon $X = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Osoita, että X ei ole yhtenäinen.

4. Olkoon $X = \{(q, 0) \mid q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$ Osoita, että X:n yhtenäiset komponentit ovat yhden pisteen kokoisia.

5. Olkoon $(X, \bar{\in})$ lähipisteavaruus ja $C \subset X$ yhtenäinen. Osoita, että $\mathrm{cl}\, C$ on yhtenäinen.

6. Osoita, että Teoreeman 8 ehto $\mathbb{R}^2$:n osajoukon yhtenäisyydelle ei ole *jos ja vain jos* -ehto. Voit esimerkiksi käyttää edellistä tehtävää hyväksi.

7. Osoita, että on olemassa lähipisteavaruus $(X, \bar{\in})$, joka ei toteuta ehtoa

   - Kaikilla $A, B \subset X$ ja $x \in X$ pätee, että $x \bar{\in} (A \cup B)$ jos ja vain jos $x \bar{\in} A$ tai $x \bar{\in} B$.

8.8 Liite: Pikajohdatus joukko-oppiin

Tässä liitteessä esittelemme joukko-opin notaation.

Joukolla tarkoitamme kokoelmaa alkioita.[3] Jos alkio x kuuluu joukkoon A, merkitsemme $x \in A$. Kaksi joukkoa, A ja B ovat itse asiassa sama joukko, jos niihin kuuluvat samat alkiot. Eli formaalisti, $A = B$, jos

[3] Russellin paradoksin välttämiseksi alkiokokoelmat on jaettava joukkoihin ja aitoihin luokkiin. Tämä aihepiiri on kuitenkin sen verran vaikea, ettemme tässä mene siihen.

Kaikilla x pätee $x \in A$ jos ja vain jos $x \in B$.

Jos A ja B ovat joukkoja ja kaikki A:n alkiot ovat myös B:n alkioita, sanomme, että A on B:n osajoukko, mitä merkitään $A \subset B$. Jos A on joukko, A:n osajoukoiksi lasketaan myös A itse sekä tyhjä joukko $\emptyset$.

Joukkojen A ja B yhdiste $A \cup B$ on joukko, johon kuuluvat kaikki ne alkiot, jotka kuuluvat A:han, B:hen tai molempiin. Joukkojen A ja B leikkaus $A \cap B$ on joukko, johon kuuluvat kaikki ne alkiot, jotka kuuluvat sekä A:han että B:hen.

Jos A on joukko ja P on ominaisuus, $\{a \in A \mid P(a)\}$ on joukko, johon kuuluvat ne A:n alkiot, joilla on ominaisuus P. Jos P on ominaisuus, $\{a \mid P(a)\}$ on joukko, johon kuuluvat ne matemaattiset oliot, joilla on ominaisuus P. Äärellinen joukko voidaan kirjoittaa myös luettelemalla sen alkiot, eli $\{x_1, \ldots, x_n\}$ on joukko, jonka alkiot ovat $x_1, \ldots, x_n$.

Jos a, b ovat mitä tahansa matemaattisia olioita, voidaan muodostaa järjestetty pari (a, b). Jos $a \neq b$, niin $(a, b) \neq (b, a)$, eli tässä alkioiden järjestyksellä on väliä. Kaksi järjestettyä paria (a, b), (c, d) ovat samat, $(a, b) = (c, d)$, jos ja vain jos $a = c$ ja $b = d$.

Jos A ja B ovat joukkoja, niiden karteesinen tulo $A \times B$ on joukko, johon kuuluvat kaikki järjestetyt parit (a, b), missä $a \in A$ ja $b \in B$. Joukon $A \times B$ osajoukkoja R kutsutaan relaatioiksi joukkojen A ja B välillä. Jos R on relaatio ja $(a, b) \in R$, merkitään aRb.

Relaatio R joukkojen A ja B välillä on funktio, jos jokaisella $a \in A$ on olemassa täsmälleen yksi $b \in B$, jolle aRb. Tällöin merkitään $R \colon A \to B$. Jos R on funktio ja aRb, merkitään $R(a) = b$.

Olkoon I joukko. Oletetaan, että jokaiseen $i \in I$ on liitetty matemaattinen olio C_i. Tällöin kaikkien C_i:den muodostamaa kokonaisuutta merkitään $(C_i)_{i \in I}$ ja kutsutaan indeksoiduksi kokoelmaksi. Jos edellä C_i:t ovat joukkoja, $\bigcup C_i$ tarkoittaa joukkoa, joka on joukkojen C_i yhdiste, eli $x \in \bigcup C_i$ jos ja vain jos $x \in C_i$ jollain $i \in I$.

Tasoa merkitään $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, koska tason pisteet ovat koordinaattipareja.

Luku 9

Luonnollisten lukujen induktio-ominaisuudesta

9.1 Johdanto

Kuten lukija varmaan tietääkin, luonnollisille luvuille voidaan tehdä induktiotodistuksia. Tämä mahdollisuus on ominainen luonnollisille luvuille. Esimerkiksi rationaali- tai reaaliluvuille ei voida tehdä induktiotodistuksia[1]. Luonnollisten lukujen järjestelmän aksiomatisoinnissa yleensä mahdollisuus tehdä induktiotodistuksia otetaankin aksioomaksi.

Induktioaksiooman avulla voidaan todistaa seuraavat luonnollisten lukujen joukon ominaisuudet

[1]Rationaaliluvun nimittäjä ja osoittaja ovat kokonaislukuja, ja näille voidaan toki tehdä induktiotodistuksia. Näin rationaaliluvuillekin voidaan todistaa asioita (luonnollisten lukujen) induktiolla, vaikkei rationaaliluvuille sellaista induktiota voidakaan tehdä, jossa induktioaskeleessa $P(q)$ johdettaisiin siitä, että $P(q')$ pätee, kun $q' < q$.

Teoreema 1 *Jos $A \subset \mathbb{N}$, niin joukossa A on pienin alkio tai A on tyhjä joukko.*

Teoreema 2 *Ei ole olemassa laskevaa, ääretöntä jonoa $n_0 > n_1 > n_2 > \ldots$ luonnollisia lukuja.*

Tässä kirjoitelmassa ensin aksiomatisoimme luonnollisten lukujen järjestelmän ja sen jälkeen pohdimme, voitaisiinko aksiomatisoinnissa induktioaksiooma korvata jommalla kummalla yllämainituista ominaisuuksista.

9.2 Lineaarijärjestys

Mietitään luonnollisten lukujen tai reaalilukujen järjestysrelaatiota $<$. Jos $x < y$ ja $y < z$, niin tällöin myös $x < z$. Lisäksi kaikille luvuille x, y pätee täsmälleen yksi seuraavista kolmesta väitteestä: $x < y$, $y < x$ tai $x = y$.

Seuraavaksi määrittelemme yleisen järjestyksen käsitteen yllämainittujen kahden huomion pohjalta. Määritelmämme siis kertoo, millainen mielivaltaisessa joukossa X määritellyn relaation olisi oltava, että olisimme valmiit pitämään sitä järjestysrelaationa.

Olkoon X joukko. Sanomme, että $<$ on lineaarijärjestys, jos se on 2-paikkainen relaatio joukossa X, joka täyttää seuraavat ehdot:

- Jos $x, y, z \in X$, joille $x < y$ ja $y < z$, niin tällöin myös $x < z$.
- Jos $x, y \in X$, täsmällen yksi seuraavasta kolmesta ehdosta pätee: $x < y$, $y < x$, $x = y$.

Esimerkiksi reaalilukujen järjestys, rationaalilukujen järjestys, kokonaislukujen järjestys ja luonnollisten lukujen järjestys ovat lineaarijärjestyksiä.

Lineaarijärjestyksiä voidaan kuitenkin määritellä lähes miten tahansa, kunhan yllämainitut ehdot toteutuvat. Esimerkiksi joukkoon $\{\text{Ville}, 42, \text{Punaisuus}\}$ voidaan määritellä lineaarijärjestys vaikkapa niin, että Ville $<$ 42, 42 $<$ Punaisuus ja Ville $<$ Punaisuus.

Mielivaltaista lineaarijärjestystä $<$ voidaan ajatella suuruusjärjestyksenä siinä mielessä, että järjestyksestä $<$ puhuttaessa käytetään usein sellaisia ilmauksia kuten "pienin alkio", "suurempi kuin", "alkioiden x ja y välissä" jne., ja nämä tarkoitetaan ymmärrettäviksi järjestyksen $<$ suhteen.

9.3 Luonnollisten lukujen joukon aksiomatisointi

Luonnollisten lukujen joukko voidaan aksiomatisoida esimerkiksi seuraavasti:

Aksiomatisointi A:

1. $<$ on lineaarijärjestys luonnollisten lukujen joukossa.
2. On olemassa pienin luonnollinen luku 0.
3. Jokaiselle luonnolliselle luvulle n on olemassa välittömästi seuraava luonnollinen luku $s(n)$. Toisin sanoen, kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee $n < s(n)$, eikä lukujen n ja $s(n)$ välissä ole luonnollisia lukuja.
4. Jos $N \subset \mathbb{N}$, jolle $0 \in N$, ja kaikilla n ehto $n \in N$ implikoi $s(n) \in N$, niin tällöin $N = \mathbb{N}$.

Viimeistä aksioomaa kutsutaan induktioaksioomaksi. Se olennaisesti sanoo, että luonnollisille luvuille voidaan tehdä induktiotodistuksia. Se sanoo, että jos N on joukko, joka sisältää kaikki induktiossa tavoitettavat luvut, niin tällöin N sisältää kaikki luonnolliset luvut.

Lukija voi helposti todeta, että luonnollisten lukujen joukko toteuttaa Aksiomatisoinnin A.

Nyt herää kysymys, voisiko olla muita joukkoja kuin luonnollisten lukujen joukko, jotka toteuttavat ko. aksioomat. Jos siis

X on joukko, ja $<$ relaatio X:ssä, joka toteuttaa allaolevat aksioomat

Aksiomatisointi B:

1. $<$ on lineaarijärjestys X:ssä.
2. On olemassa pienin X:n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaisella X:n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X:n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X:n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X:n alkioita.
4. Jos $N \subset X$, jolle $\bar{0} \in N$, ja kaikilla n ehto $n \in N$ implikoi $\bar{s}(n) \in N$, niin tällöin $N = X$.

niin onko X jollain perustavalla tavalla samanlainen kuin luonnollisten lukujen joukko? (Jos lukija ei jaksa kahlata kaikkia aksioomia läpi, niin kerrottakoon, että tämä aksiomatisointi on muutoin sama kuin Aksiomatisointi A, mutta luonnollisten lukujen joukon sijaan puhutaan joukosta X.)

Huomautettakoon, että muut tavalliset lukujoukot kuin $\mathbb{N}$ eivät kelpaa X:ksi: Kokonaislukujen joukko toteuttaa aksioomat 1 ja 3, muttei aksioomia 2 ja 4. Ei-negatiivisten reaalilukujen joukko toteuttaa aksioomat 1 ja 2, muttei aksioomia 3 ja 4. Jos reaaliluvulle x yritettäisiin valita seuraaja $s(x)$, tämä ei olisi välitön seuraaja, koska esimerkiksi luku $(x + s(x))/2$ olisi x:n ja $s(x)$:n välissä. Lukujoukko $\{0, 1, \ldots, 100\}$ toteuttaa aksioomat 1 ja 2, muttei aksioomaa 3, koska luvulla 100 ei ole seuraajaa tässä joukossa. Tämä joukko toteuttaa kylläkin hiukan muokatun version induktioaksioomasta, kun induktioaksioomaa muokataan niin, että se huomioi alkion $s(100)$ puutteen. (Näin ollen joukolle $\{0, 1, \ldots, 100\}$ voidaan tehdä induktiotodistuksia.)

Oletetaan edelleen, että X toteuttaa Aksiomatisoinnin B. Vastaus esittämäämme kysymykseen on: Kyllä, X on perustavalla tavalla samanlainen kuin $\mathbb{N}$, kun perustavalla tavalla samanlainen määritellään oikein. Se nimittäin määritellään niin, että $\mathbb{N}$ ja X ovat perustavalla tavalla samanlaisia, koska on olemassa aidosti kasvava bijektio $b\colon \mathbb{N} \to X$.

Funktio b määritellään induktiivisesti seuraavasti:

- $b(0) = \bar{0}$.
- Jos $b(n)$ on jo määritelty, niin $b(s(n))$ määritellään $b(s(n)) = \bar{s}(b(n))$.

Seuraavien kolmen kohdan todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi:

- $b(n)$ tulee induktiossa määritellyksi kaikille $n \in \mathbb{N}$.
- b on aidosti kasvava.
- b on bijektio.

Todistaessa sinun kannattaa pitää mielessä, että induktiotodistuksia voidaan tehdä sekä $\mathbb{N}$:lle että X:lle. Lisäksi kannattaa pitää mielessä, että aidosti kasvavan funktion todistaminen injektioksi on helppo nakki. Kannattaa myös muistaa, että $\mathbb{N}$ on ihan tavallinen luonnollisten lukujen joukko. Todistaessasi voit käyttää kaikkea mitä tiedät $\mathbb{N}$:sta, eikä sinun tarvitse työskennellä Aksiomatisoinnista A käsin. X:stä et tosin voi olettaa tietäväsi muuta kuin sen, että se toteuttaa Aksiomatisoinnin B.

Seuraava voi mennä lukijalta yli hilseen, mutta selitän kuitenkin, mitä ammattimatemaatikko päättelisi tilanteestamme: Aksiomatisoinnit A ja B ovat olennaisesti sama aksiomatisointi. Vain nimet eroavat. Aksiomatisoinnissa B kutsutaan X:ksi sitä, mitä Aksiomatisoinnissa A kutsutaan luonnollisten lukujen joukoksi. Koska luonnollisilta luvuilta on aidosti kasvava bijektio b mille tahansa joukolle X, joka toteuttaa Aksiomatisoinnin B, on olemassa olennaisilta piirteiltään vain yksi systeemi, luonnollisten lukujen joukko, joka toteuttaa Aksiomatisoinnin A/B. Toisin sanoen, erot systeemien välillä, jotka toteuttavat nämä aksioomat ovat epäolennaisia. **Tämä tarkoittaa sitä, että kaikki, mitä luonnollisten lukujen**

järjestyksestä voidaan todistaa millä tahansa menetelmällä, on seurausta Aksiomatisoinnin A aksioomista.[2]

Huomautettakoon, että Aksiomatisoinnin A päälle rakentaen voidaan määritellä myös luonnollisten lukujen yhteen- ja kertolasku. Määritelmät ovat luonteeltaan induktiivisia, mutta siihen, kuinka se tehdään, emme tässä mene.

9.4 Induktioaksiooman seurauksia

Nyt todistetaan johdannossa luvatut luonnollisten lukujen systeemin ominaisuudet:

Teoreema 1 *Jos $N \subset \mathbb{N}$, niin joukossa N on pienin alkio tai N on tyhjä.*

Todistus: Olkoon $N \subset \mathbb{N}$. Oletetaan, että joukossa N ei ole pienintä alkiota. Luku 0 ei voi kuulua joukkon N, koska jos se kuuluisi, se olisi N:n pienin alkio. Oletetaan, että luvuista $0, \ldots, n$ mikään ei kuulu joukkoon N. Myöskään $s(n)$ ei voi kuulua joukkoon N, koska jos se kuuluisi, se olisi N:n pienin alkio. Siinä tulikin induktion lähtökohta ja induktioaskel. Siis kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $n \notin N$. Siis N on tyhjä joukko. $\square$

Teoreema 2 *Ei ole olemassa laskevaa ääretöntä jonoa $n_0 > n_1 > n_2 > \ldots$ luonnollisia lukuja.*

Todistus: Jos tällainen jono olisi olemassa, niin $\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ olisi epätyhjä joukko luonnollisia lukuja, jossa ei ole pienintä alkiota. Mutta tällaista joukkoa ei edellisen teoreeman nojalla ole olemassa. $\square$

[2] Pidemmälle ehtineille selitän, että tarkoitan lihavoidulla lauseella seuraavaa: Olkoon $P(X)$ mikä tahansa järjestysstruktuurien ominaisuus (eli ominaisuus, joka voi olla tai olla olematta kullakin järjestysstruktuurilla X) siten, että $P(\mathbb{N})$ pätee, eli luonnollisten lukujen systeemillä on tämä ominaisuus. Nyt voidaan todistaa seuraava väite: *Kaikilla systeemeillä X pätee, että jos X toteuttaa Aksiomatisoinnin B, niin myös $P(X)$ pätee*, eli toisin sanoen $P(X)$ on seurausta Aksiomatisoinnista B. Vastaavasti myös $P(\mathbb{N})$ on seurausta Aksiomatisoinnista A.

9.5 Vaihtoehtoisia aksiomatisointiyrityksiä

Tässä luvussa induktioaksiooma yritetään korvata jommalla kummalla edellisen luvun tuloksista. Tällöin saadaan toki aksioomat, jotka luonnolliset luvut toteuttavat, mutta syntyykö muita ongelmia?

Oletetaan siis, että $X = \mathbb{N}$, ja tutkitaan seuraavia kahta aksiomatisointia.

Aksiomatisointi 1:

1. $<$ on lineaarijärjestys X:ssä.
2. On olemassa pienin X:n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaisella X:n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X:n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X:n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X:n alkioita.
4. Jos $N \subset X$, niin N:ssä on pienin alkio tai N on tyhjä joukko.

Aksiomatisointi 2:

1. $<$ on lineaarijärjestys X:ssä.
2. On olemassa pienin X:n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaisella X:n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X:n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X:n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X:n alkioita.
4. Ei ole olemassa laskevaa ääretöntä jonoa $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ joukon X alkioita.

(Huomautettakoon, että nämä aksiomatisoinnit ovat samat kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksiooma on korvattu uudella aksioomalla.)

Ongelma on siinä, että kaikki joukot X, jotka toteuttavat nämä aksiomatisoinnit, eivät ole olennaisesti samanlaisia kuin $\mathbb{N}$.

X voidaan valita seuraavasti: X koostuu kahdesta luonnollisten lukujen joukon kopiosta[3], ensimmäisestä ja jälkimmäisestä. Kaikki jälkimmäisen kopion alkiot ovat suurempia (X:ään määriteltävän järjestyksen mielessä) kuin kaikki ensimmäisen kopion alkiot. Kopioiden sisällä järjestys määritellään kuten luonnollisten lukujen joukon järjestys.

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi todistaa, että X tosiaan toteuttaa sekä Aksiomatisoinnin 1 että Aksiomatisoinnin 2.

X ja $\mathbb{N}$ eivät kuitenkaan ole olennaisesti samanlaisia: $\mathbb{N}$:ssä jokaisella alkiolla n paitsi 0:lla on välitön edeltäjä $e(n)$, jolle $e(n) < n$, ja $e(n)$:n ja n:n välissä ei ole alkioita. X:ssä taas jälkimmäisessä kopiossa on pienin alkio p. p:llä ei ole välitöntä edeltäjää, koska kaikki p:tä pienemmät alkiot ovat ensimmäisen kopion alkioita, eikä näiden joukossa ole suurinta. Myöskään p ei ole $\bar{0}$, koska $\bar{0}$ on ensimmäisen kopion pienin alkio.

Jos olisi aidosti kasvava bijektio $b\colon \mathbb{N} \to X$, niin $b(n) = p$ jollain $n \neq 0$. Tällöin $b(e(n)) = q$ jollain $q < p$. Nyt kuitenkin q:n ja p:n välissä on alkioita, jolle mikään $\mathbb{N}$:n alkio ei voi kuvautua. Ristiriita.

X ei myöskään voi toteuttaa induktioaksioomaa, koska jos se toteuttaisi sen, se toteuttaisi koko aksiomatisoinnin B, ja aidosti kasvava bijektio b olisi olemassa. Näin ollen induktioaksiooma ei seuraa aksiomatisoinnista 1 tai aksiomatisoinnista 2.

Ohimennen mainittakoon, että Aksiomatisoinnin 1 toteuttavia systeemejä kutsutaan ordinaaleiksi. Joukko-oppia ammatikseen tutkivat matemaatikot ovat paljon tekemisissä ordinaalien kanssa. Ordinaaleille voidaan tehdä eräänlaisia, luonnollisten lukujen induktiota monimutkaisempia induktiotodistuksia. Tätä tekniikkaa kutsutaan transfiniittiseksi induktioksi, mutta yksityiskohtiin emme tässä mene.

[3]Kopiot voivat olla esimerkiksi $Y' = \{0', 1', 2', \dots\}$ ja $Y'' = \{0'', 1'', 2'', \dots\}$. Idea siis on, että sekä Y' että Y'' toimivat samoin kuin luonnollisten lukujen joukko, mutta $Y' \cap Y'' = \emptyset$.

9.6 Vielä yksi aksiomatisointiyritys

Edellisissä aksiomatisoinneissa jouduttiin ongelmiin, koska aksioomilla oli malli X, jossa oli alkio, jolla ei ollut välitöntä edeltäjää. Entä jos välittömän edeltäjän olemassaolo otettaisiin aksioomaksi induktioaksiooman sijaan?

Aksiomatisointi 3:

1. $<$ on lineaarijärjestys X:ssä.

2. On olemassa pienin X:n alkio $\bar{0}$.

3. Jokaisella X:n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X:n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X:n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X:n alkioita.

4. Jokaisella $\bar{0}$:sta eroavalla X:n alkiolla n on välitön edeltäjä $\bar{e}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla $n \in X, n \neq \bar{0}$, pätee $\bar{e}(n) < n$, eikä $\bar{e}(n)$:n ja n:n välissä ole X:n alkioita.

(Edelleen sama kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksiooma on korvattu uudella aksioomalla.)

Luonnollisten lukujen systeemi toteuttaa nämä aksioomat, OK! Mutta nyt X voidaan valita myös seuraavasti: X koostuu luonnollisten lukujen joukon kopiosta, jonka perässä on kokonaislukujen joukon kopio. Kaikki kokonaislukujen joukon kopion alkiot ovat suurempia (X:ään määriteltävän järjestyksen mielessä) kuin kaikki luonnollisten lukujen joukon kopion alkiot. Kopioiden sisällä järjestys määritellään kuten kyseisissä lukujoukoissa.

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että X tosiaan toteuttaa Aksiomatisoinnin 3.

X on olennaisesti erilainen kuin $\mathbb{N}$, koska X:ssä on osajoukko A, jossa ei ole pienintä alkiota. A:ksi voidaan valita yksinkertaisesti se kokonaislukujen joukon kopio.

Myöskään ei ole olemassa aidosti kasvavaa bijektiota $b\colon \mathbb{N} \to X$, koska jos tällainen bijektio olisi olemassa, joukon A alkukuva olisi $\mathbb{N}$:n epätyhjä osajoukko, jossa ei ole pienintä alkiota.

Samasta syystä kuin edellisessä luvussa, X ei toteuta induktioaksioomaa, eikä näin ollen induktioaksiooma seuraa aksiomatisoinnista 3.

9.7 Toimiva ratkaisu

Aksiomatisointi 3 ei takaa, että kaikilla osajoukoilla on pienin alkio, eikä Aksiomatisointi 1 takaa, että jokaisella nollasta eroavalla alkiolla on edeltäjä. Mutta entä, jos näiden molempien uudet aksioomat otettaisiin aksioomiksi? Tällöin saadaan toimiva ratkaisu.

Aksiomatisointi 4:

1. $<$ on lineaarijärjestys X:ssä.
2. On olemassa pienin X:n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaisella X:n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X:n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X:n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X:n alkioita.
4. Jokaisella $\bar{0}$:sta eroavalla X:n alkiolla n on välitön edeltäjä $\bar{e}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla $n \in X, n \neq \bar{0}$, pätee $\bar{e}(n) < n$, eikä $\bar{e}(n)$:n ja n:n välissä ole X:n alkioita.
5. Jos $N \subset X$, niin joko N on tyhjä tai N:ssä on pienin alkio.

(Sama kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksiooma on korvattu kahdella uudella aksioomalla.)

Teoreema 3 *Jos X toteuttaa Aksiomatisoinnin 4, niin tällöin X toteuttaa myös indktioaksiooman (Aksiomatisoinnin B viimeinen aksiooma.)*

Todistus: Oletetaan, että X toteuttaa Aksiomatisoinnin 4. Olkoon $N \subset X$ sellainen, että $\bar{0} \in N$, ja $n \in N$ implikoi $\bar{s}(n) \in N$. Tehdään vastaoletus $N \neq X$. Siis $X \setminus N$ on epätyhjä, ja siinä on pienin alkio n. Nyt $n \neq \bar{0}$, joten on alkio $\bar{e}(n)$. Mutta koska $\bar{e}(n) < n$, pätee $\bar{e}(n) \in N$. Siis oletuksen nojalla $n = \bar{s}(\bar{e}(n)) \in N$. Ristiriita.$\square$

Nyt siis jokainen Aksiomatisoinnin 4 toteuttava systeemi toteuttaa myös Aksiomatisoinnin B, ja on olennaisesti samanlainen luonnollisten lukujen systeemin kanssa.

Tutkitaan vielä seuraavaa aksiomatisointia:

Aksiomatisointi 5:

1. $<$ on lineaarijärjestys X:ssä.
2. On olemassa pienin X:n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaisella X:n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X:n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X:n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X:n alkioita.
4. Jokaisella $\bar{0}$:sta eroavalla X:n alkiolla n on välitön edeltäjä $\bar{e}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla $n \in X, n \neq \bar{0}$, pätee $\bar{e}(n) < n$, eikä $\bar{e}(n)$:n ja n:n välissä ole X:n alkioita.
5. Ei ole olemassa ääretöntä laskevaa jonoa $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ joukon X alkioita.

(Sama kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksiooma on korvattu kahdella uudella aksioomalla.)

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että jos X toteuttaa tämän aksiomatisoinnin, se toteuttaa myös Aksiomatisoinnin B. Helponta lienee todistaa välivaiheena, että X toteuttaa Aksiomatisoinnin 4.

Aksiomatisointi 5 tietysti sopii huonosti luonnollisten lukujen aksiomatisoinniksi, koska viimeisessä aksioomassa luonnolliset luvut oletetaan jo valmiiksi tunnetuiksi; indeksien on tosiaan tarkoitus viitata oikeisiin luonnollisiin lukuihin, ei joukon X alkioihin. Tästä ongelmasta huolimatta on kuitenkin mielenkiintoista tutkia, ovatko nämä aksioomat yhtäpitäviä Aksiomatisoinnin B kanssa.

9.8 Loppusanat

Kun pistämme kirjoitelman tulokset yhteen, saamme tuloksen, että Teoreemojen 1 ja 2 väitteet ovat kumpikin yhtäpitäviä luonnollisten lukujen induktioaksiooman kanssa.

Luonnolliset luvut toteuttavat Teoreemojen 1 ja 2 väitteet, ja luvussa 3 konstruoitu aidosti kasvava bijektio takaa, että kaikki luonnollisten lukujen järjestysominaisuudet seuraavat Aksiomatisoinnista A, ja näin ollen myös Aksiomatisoinnista B, joten Aksiomatisointi B (tai aidosti kasvavan bijektion b olemassaolo) implikoi Aksiomatisointien 4 ja 5 väitteet. Sekä Aksiomatisointi 4 että Aksiomatisointi 5 puolestaan implikoivat Aksiomatisoinnin B väitteet edellisen luvun tulosten nojalla.

Ylläoleva voidaan kiteyttää seuraavasti:

Teoreema 4 *Olkoon X systeemi, joka toteuttaa Aksiomatisoinnin 3. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä.*

- *X toteuttaa induktioaksiooman.*
- *Kaikissa X:n epätyhjissä osajoukoissa on pienin alkio.*
- *Ei ole olemassa ääretöntä laskevaa jonoa $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ joukon X alkioita.*
- *On olemassa aidosti kasvava bijektio $b\colon \mathbb{N} \to X$.*

Aksioomat harvoin ovat yhtäpitäviä tyhjiössä, vaan ne ovat yhtäpitäviä joidenkin muiden aksioomien vallitessa. Tässä tapauksessa induktioaksiooman ja Teoreemojen 1 ja 2 väitteiden yhtäpitävyyden kannalta ratkaisevaksi osoittautui aksiooma, joka sanoo välittömien edeltäjien olemassaolon.

Jos kiinnostuit tässä kirjoituksessa esitetyistä päättelytekniikoista, sinun kannattaa lähteä yliopistoon lukemaan matematiikkaa ja erikoistua logiikkaan. Logiikassa on osa-alue, malliteoria, jossa tutkitaan sitä, millaisia aksioomat toteuttavia systemeejä voidaan millekin aksioomajoukolle muodostaa.

Kirjallisuutta

[1] Väänänen, Jouko, *Matemaattinen logiikka*, luentomoniste

[2] Wikipedia, *Halting problem*

[3] Browne, Cameron, *Hex Strategy: Making the Right Connections*, A K Peters Ltd, 2000.

[4] Čech, Eduard, *Topological Spaces*, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, and Interscience Publishers, a Division of John Willen and Sons, London, New York, Sydney, 1966

[5] Benacerraf, Paul ja Putnam, Hilary (ed.), *Philosophy of Mathematics*

[6] Balaguer, Mark, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*

[7] Heyting, Arend, *Intuitionism: An introduction*

Osa III

Itseopiskelumateriaali

Luku 10

Niukan esittely

∀: Hei kaikki, minä olen universaalikvanttori.

∃: Höh, *Aa*, mikäs titteli tuo nyt on olevinaan?

∀: Matemaatikot kutsuvat ylösalaisin käännettyä A:ta universaalikvanttoriksi.

∃: Jos kerran aletaan hienostelemaan, niin en minäkään sitten ole *Ee*, vaan eksistenssikvanttori.

∀: Palataan kuitenkin asiaan. Me seikkailemme kirjoitelmassa *Pelataan niukkaa.*

∃: Me pelaamme siellä kaikenlaisia pelejä.

∀: Kirjoitelma löytyy tästä kirjasta.

Klassisesta matematiikasta löytyy paljon mielenkiintoisia ongelmia ja niiden nerokkaita ratkaisuja.

∃: En minä vain ole löytänyt matematiikasta mitään mielenkiintoista. Matematiikkahan on vain kokoelma suttuisia kaavoja paperilla.

∀: Ehkä asiaan pitäisi syventyä. Kaavat ovat vain kieli asioiden ilmaisemiseen, ja ehkäpä ne kaavojen kuvailemat asiat ovat mielenkiintoisia.

$\exists$: No siinä tapauksessa jonkun pitäisi kyllä kehittää houkuttelevampi tapa kuvata asioita.

Esimerkki tällaisesta ongelmasta on jatkuvuuden määritteleminen: Kuinka voisimme antaa matemaattisesti täsmällisen luonnehdinnan, jonka avulla voisimme erottaa jatkuvat funktiot muista funktioista?

$\forall$: Jatkuvuus on venyvä ominaisuus. Jos jatkuvan funktion kuvaajaa venytetään eri tavoin, on tuloksena edelleen jatkuvan funktion kuvaaja.

$\exists$: Kuinka sitten voisi *laskea*, onko funktio jatkuva? Laskun tuloshan on aina täsmällinen, eikä siinä ole mitään epämääräistä tai venyvää.

$\forall$: En tiedä. Ehkä Tuomas kertoo, kunhan luemme hiukan pidemmälle.

Eräs ensimmäisenä mieleen tuleva tapa luonnehtia jatkuvuus on käyttää infinitesimaalisen pienen (eli äärettömän pienen) muutoksen käsitettä: Funktio on jatkuva, jos sen arvo muuttuu infinitesimaalisen vähän, kun pistettä, jossa funktion arvoa tutkitaan, muutetaan infinitesimaalisen vähän. Määritelmä toimii, jos infinitesimaalisen pienen luvun käsite saadaan kehitettyä toimivaksi. Infinitesimaalisen pienen luvun käsite saadaan kehitettyä (Abraham Robinsonin *Epästandardi analyysi*), mutta se on monimutkaista jopa matemaattisesti koulutetulle henkilölle.

$\exists$: Nyt Tuomas alkoi puhua jostain yliopistotason kamasta, joka vaatii vuosikausien perehtymistä. Jos jatkuvuuden ymmärtäminen vaatii yliopistotason opintoja, minä taidan mielummin lähteä pelaamaan pelejä.

$\forall$: Ehkä voisi löytyä joku tapa luonnehtia jatkuvuutta ilman, että täytyy viitata äärettömän pieniin lukuihin.

$\exists$: Just joo. Väitätkö muka, että voisimme viitata äärettömän pieneen muutokseen *kiertoilmauksella*, jossa itse asiassa puhutaan pelkästään äärellisen kokoisista luvuista? Vähän niin kuin poliittisesti korrektisti.

Differentiaali- ja integraalilaskennan kehitys suunnilleen vuosina 1600–1900 paljasti, että tällainen kiertoilmaus on olemassa. Funktio on jatkuva pisteessä a, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolle kaikilla x, $|x - a| < \delta$, pätee $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

> **$\exists$:** Tuosta minä en ymmärrä hölkäsen pöläystä.
>
> **$\forall$:** Katso hiukan tarkemmin. Kyllä sinä ymmärrät kaikki merkit. ϵ ja δ ovat vain reaalilukumuuttujia.
>
> **$\exists$:** No joo, mutta niistä muodostettu kokonaisuus on niin monimutkainen, ettei sitä pysty hahmottamaan.

Kiertoilmauksessa esiintyy kolminkertainen kvantifiointi ”kaikilla . . . on olemassa . . . siten, että kaikilla . . . pätee . . . ”. Sen hahmottaminen on todella vaikeaa.

> **$\forall$:** Kvantifiointi tarkoittaa ilmauksia ”kaikki” ja ”on olemassa”.

Onneksi matemaattinen logiikka tarjoaa tavan hahmottaa sisäkkäisiä kvantifiointeja. Lause

> ”Kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolle kaikilla x, $|x - a| < \delta$, pätee $|f(x) - f(a)| < \epsilon$”

ajatellaan pelinä, jossa pelaajat $\forall$ ja $\exists$ valitsevat vuorotellen arvoja muuttujille ϵ, δ ja x.

> **$\exists$:** No niin, nyt päästiin asiaan.

$\forall$ yrittää valita arvot niin, että lauseen ehto $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ on epätosi, ja $\exists$ yrittää valita arvoja niin, että ehto on tosi. Lauseen totuus riippuu siitä, kummalla pelaajalla on voittostrategia. Jos voittostrategia on $\exists$:llä, on lause tosi, ja jos voittostrategia on $\forall$:lla, on lause epätosi. (Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen loogikot ovat muuten kunnostautuneet erilaisten logiikkaan liittyvien pelien tutkimuksessa.)

> **$\exists$:** Pelataan jatkuvuuspeli pisteessä 0 funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = 5x$.

$\forall$: Valitsen ϵ:n arvon $0,1$!

$\exists$: Valitsen δ:n arvon $0,01$!

$\forall$: Valitsen x:n arvon $0,001$!

$\exists$: $|f(x) - f(0)| = 0,001 \cdot 5 = 0,005 < 0,1 = \epsilon$. Voitin!

Pelataan niukkaa-kirjoitelmaa lukiessa ei tarvitse tyytyä passiivisesti omaksumaan esitettyä asiaa, vaan lukija pääsee itse ratkomaan tehtäviä, joissa etsitään voittostrategioita jatkuvuutta kuvaaviin peleihin.

$\forall$: Ja vaikeissa kohdissa me annamme hyviä neuvoja.

$\exists$: Pelataan jatkuvuuspeli pisteessä 0 funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^{42}$.

$\forall$: Kuule, tämä teksti alkaa olla liian pitkä esittelyksi.

$\exists$: Lähdetäänkö sitten varsinaiseen kirjoitelmaan pelaamaan? Sehän on seuraavana tässä kirjassa.

$\forall$: Lähdetään vaan. Vaikka lukija olisi tippunut kärryiltä tätä johdantoa lukiessa, se ei haittaa. Kirjoitelmassa asiat selitetään huolellisesti alusta pitäen.

$\exists$: Eikä siellä puhuta mistään kolminkertaisista kvantifioinneista, vaan jatkuvuus määritellään suoraan pelin avulla.

Luku 11

Pelataan niukkaa

11.1 Esinäytös

Henkilöt: $\forall$ ja $\exists$, pelureita.

$\exists$: Pelataan niukkaa, sano joku luku.

$\forall$: Viisi!

$\exists$: Kuusi! Voitin niukasti.

$\exists$: Pelataan uudestaan. Sano joku luku.

$\forall$: Miljoona!

$\exists$: Miljoona yksi! Voitin niukasti.

$\exists$: Pelataan vielä kerran. Sano joku luku.

$\forall$: Miljardi!

$\exists$: Miljardi yksi! Voitin niukasti.

Niukka on ala-asteiden pihoilla pelattu kahden hengen peli, jossa suuremman luvun sanonut voittaa. Kuten lukija pystyikin jo päättelemään, pelaajalla, joka sanoo luvun viimeisenä, on menetelmä, jolla hän voittaa pelin varmasti. Jos ensimmäinen pelaaja sanoo luvun a, sanoo jälkimmäinen pelaaja luvun $a + 1$. Tällaista varmaan voittoon johtavaa menetelmää kutsutaan *voittostrategiaksi.*

Useita matemaattisia ilmiöitä voidaan mieltää pelien avulla. Esimerkiksi se, että jälkimmäisellä pelaajalla on voittostrategia niukkapelissä, heijastelee sitä tosiasiaa, että jokaista lukua kohti on olemassa toinen, suurempi luku.

> **$\forall$:** $\exists$ pystyy sanomaan suurempia lukuja kuin minä. En taida enää pelata niukkaa.
>
> **$\exists$:** On olemassa muitakin pelejä. Joissain niistä voittaa sanomalla pieniä lukuja.
>
> **$\forall$:** Minä taidankin olla hyvä sanomaan pieniä lukuja. Pelataan jotain sellaista.
>
> **$\exists$:** [Hykertelee itsekseen: Nyt se hölmö meni lankaan. Voitan niukan, koska jokaista lukua kohti on olemassa toinen, suurempi luku. Mutta aivan vastaavasti jokaista positiivista lukua kohti on olemassa toinen, pienempi positiivinen luku. Itse asiassa minkä tahansa kahden keskenään erisuuren reaaliluvun välissä on reaalilukuja.]

Välipelissä $\forall$ sanoo ensin reaaliluvut x ja y, joille $x < y$. Sitten $\exists$ sanoo reaaliluvun z. Pelaaja $\exists$ voittaa välipelin, jos $x < z < y$. Muutoin $\forall$ voittaa.

> **$\exists$:** Pelataan välipeliä, sano luvut x ja y, joille $x < y$.
>
> **$\forall$:** 1 ja 2!
>
> **$\exists$:** $1,07$! Koska $1 < 1,07 < 2$, minä voitin.

$\exists$:llä on välipelissä voittostrategia: Jos $\forall$ sanoo luvut x ja y, $x < y$ (koska luonnehdimme systeemiä, jolla $\exists$ voittaa, tekipä $\forall$ mitä tahansa, emme voi tässä olettaa luvuilta x ja y muuta, kuin sääntöjen vaatimuksen $x < y$), voi $\exists$ sanoa z:na lukujen x ja y keskiarvon $x/2 + y/2$, joka on x:n ja y:n välissä. Tarkemmin tämä voidaan perustella seuraavasti: Koska $x/2 < y/2$, pätee

$$x = x/2 + x/2 < x/2 + y/2 < y/2 + y/2 = y,$$

joten $\exists$:n voittostrategia todella toimii.

$\exists$: Pelataan uudestaan.

$\forall$: 1 ja $1,07$!

$\exists$: $1,035$! Voitin.

$\exists$: Pelataan uudestaan.

$\forall$: 1 ja $1,035$!

$\exists$: $1,0175$! Voitin.

Välipeli heijastelee sitä tosiasiaa, että kahden erisuuren reaaliluvun välissä on aina reaalilukuja. Välipelin avulla voidaan osoittaa, että ei ole olemassa pienintä positiivista reaalilukua.

$\forall$: Luku on positiivinen, jos se on suurempi kuin nolla.

$\exists$: Nolla ei ole positiivinen luku.

$\forall$: Kylläpä sitä ollaan negatiivisella päällä.

$\exists$: Nolla ei ole myöskään negatiivinen. Nolla on nolla.

Jos $\forall$ väittää, että y on pienin positiivinen reaaliluku, voi $\exists$ haastaa $\forall$:n välipeliin. $\forall$ uskoo, että lukujen 0 ja y välissä ei ole reaalilukuja, ja niinpä hän sanoo luvut 0 ja y. Nyt $\exists$ kumoaa $\forall$:n uskomuksen sanomalla luvun $y/2$, joka on positiivinen, y:tä pienempi reaaliluku.

$\forall$: $0,000001$ on kyllä kaikkein pienin positiivinen reaaliluku.

$\exists$: Katsotaanpa, pelataan välipeliä.

$\forall$: OK. 0 ja $0,000001$!

$\exists$: $0,0000005$! Voitin.

$\forall$: Myönnetään, $0,000001$ ei olekaan pienin positiivinen reaaliluku.

$\exists$: Pelataan vielä.

$\forall$: Pidetään hiukan taukoa, että Tuomaskin saa suunvuoron ja pääsee esittelemään tämän tekstin.

$\exists$: Lupaa, että pelaat minun kanssa myöhemmin.

∀: Minä lupaan.

Muutos on jatkuvaa, jos muutosta tapahtuu sitä vähemmän, mitä vähemmän aikaa kuluu. Tässä kirjoitelmassa tutkimme pelejä, joiden avulla edellinen luonnehdinta ”sitä vähemmän, mitä vähemmän aikaa kuluu” voidaan ilmaista matemaattisen täsmällisesti. Aloitamme luvulla, jossa pohditaan jatkuvuutta yleisellä tasolla. Sen jälkeen esittelemme jatkuvuuspelin ja päästämme lukijan etsimään sen voittostrategioita.

∀: Kuulostaapa vaikealta. Osaakohan lukija etsiä voittostrategoita?

∃: Katso nyt seuraavia lukuja. Niissähän on kaikenlaisia johdattelevia tehtäviä.

∀: Niinpä. Tehtäviin paneutuminen saa ihmeitä aikaan.

Lopuksi tutkimme jatkuvuuden ja jatkuvuuspelin välistä yhteyttä sekä jatkuvuuspelin muunnelmia.

11.2 Jatkuvuus

Siirryt polkupyörällä pisteestä a pisteeseen b. Nopeutesi on 36 kilometriä tunnissa. Jos tutkit matkallasi minuutin mittaista ajanjaksoa, huomaat kulkeneesi $60\,\mathrm{s} \cdot 36\,\mathrm{km/h} = 600\,\mathrm{m}$. Jos tutkit sekuntin mittaista ajanjaksoa, huomaat kulkeneesi 10 metriä. Sekuntin sadasosassa olet kulkenut 10 senttiä, ja sekuntin miljoonasosassa vain $0,001$ senttimetriä.

Kun tutkit yhä lyhyempiä ajanjaksoja, huomaat kulkeneesi yhä vähemmän. Tällaista liikettä kutsutaan jatkuvaksi[1].

∃: Höh, onko ihmekään, että tyyppi liikkuu polkupyörällä vain $0,001$ senttimetriä. Autolla pääsisi paljon lujempaa.

[1]Korkeampaa fysiikkaa tunteville lukijoille huomautan, että tämän luvun esimerkeissä liikutaan klassisen newtonilaisen fysiikan maailmassa, joka ei ole kvantittunut, ja jossa valonnopeus ei ole universaali nopeuksien yläraja. Tarkoitukseni on valaista matemaattisia ideoita, ei kuvailla todellisuutta.

∀**:** Hyss! Jos alamme puhumaan autoista tässä tekstissä, karkoitamme ympäristötietoiset lukijat.

Jos ajaisimme autolla, vauhtimme olisi kenties 120 kilometriä tunnissa. Minuutissa liikkuisimme 2 kilometriä ja sekuntissa $33,33$ metriä. Vaikka lukuarvot ovat hiukan suurempia kuin pyöräillessä, sama ilmiö toistuu: Kun tutkimme yhä lyhyempiä ajanjaksoja, huomaamme kulkeneemme yhä lyhyempiä matkoja. Myös auton liike on jatkuvaa.

∀**:** 120 kilometriä tunnissa on aika nopeaa. Kyllä auto ajaa kaikkina aikaväleinä vähintään yhden senttimetrin.

∃**:** Ei. Jos tutkimme aikaväliä, jonka pituus on $0,0002$ sekuntia, auto ajaa tuona aikana

$$0,0002\,\mathrm{s} \cdot 120\,\mathrm{km/h} = 0,0002\,\mathrm{s} \cdot 33\frac{1}{3}\,\mathrm{m/s} < 0,01\,\mathrm{m}.$$

∀**:** No kyllä se ainakin ajaa kaikkina aikaväleinä vähintään yhden millimetrin.

∃**:** Eikä. Jos tutkimme aikaväliä, jonka pituus on $0,00002$ sekuntia, auto ajaa tuona aikana alle yhden millimetrin.

∀**:** No kyllä se nyt ainakin ajaa kaikkina aikaväleinä vähintään $0,1$ millimetriä

∃**:** Eikä. Jos tutkimme aikaväliä, jonka pituus on $0,000002$ sekuntia, auto ajaa tuona aikana alle $0,1$ millimetriä.

Tehtävä 1

Etsi yleinen menetelmä, jolla ∃ voittaa ylläkuvatun väittelyn.

- Ensin ∀ sanoo pituuden ℓ, joka on suurempi kuin 0.
- Mikä nollaa suurempi aikaväli t väittelijän ∃ pitää sen jälkeen sanoa, että pätisi seuraavaa:

  Jos auto kulkee 120 kilometriä tunnissa, se kulkee ajassa t vähemmän kuin pituuden ℓ.

Ei tee eroa, vaikka emme kulkisikaan vakionopeudella. Voimme hidastaa ylämäessä,

> ∃: Ja kiihdyttää alamäessä!

mutta yhä huomaamme kulkeneemme yhä lyhyempiä matkoja, kun tarkastelemme yhä lyhyempiä ajanjaksoja. Myös vaihtelevalla nopeudella liikkuminen on jatkuvaa.

Kaikki kuviteltavissa oleva liikkuminen ei ole jatkuvaa. Kun Mr. Spock astelee siirtimeen (siirrin tunnetaan myös nimellä teleport[2]) Star Trek -televisiosarjassa, hänen liikkeensä on jatkuvaa. Siirrin siirtää Spockin silmänräpäyksessä vieraalle planeetalle. Tällöin Spockin liikkeessä on epäjatkuvuuskohta. Vaikka tarkastelisimme kuinka pientä teleport-operaation sisältävää ajanjaksoa tahansa, havaitsisimme Spockin siirtyneen tuona ajanjaksona tuhansia kilometrejä.

Oletetaan, että kuljemme yksiulotteisesti. Tällöin sijaintimme voidaan ilmaista yhdellä koordinaatilla. Merkitään symbolilla $f(t)$ kulkijamme paikkaa yksiulotteisessa koordinaatistossa ajanhetkellä t. Oletetaan että olemme matkamme alussa origossa, ja että matkamme alkuhetki on hetki 0.

> ∃: Nyt Tuomas olettaa, että lukija on Aatami tai Eeva.
>
> ∀: Ei, haluttu ajanhetki voidaan sopia nollahetkeksi. Jos mittaamme aikaa esimerkiksi tunteina, on hetki 1 se hetki, jona on kulunut yksi tunti sovitusta nollahetkestä, ja niin edelleen.
>
> ∃: Minusta olisi paljon coolimpaa sopia alkuhetkeksi -1.
>
> ∀: Kyllä kai niinkin voisi tehdä, jos vaan haluaisi.

Jos nopeutemme on koko ajan 36 kilometriä tunnissa, voidaan f määrittää helposti kaavalla

$$f(t) = 36\,\mathrm{km/h} \cdot t.$$

[2]Teleport on kuvitteellinen laite, joka siirtää henkilön paikasta toiseen ilman, että siirrossa kuluu aikaa

Tasaisella nopeudella liikkuminenkin on helppoa määritellä: Liike on liikettä tasaisella nopeudella, jos on olemassa nopeus v, jolle

$$f(t) = vt \text{ kaikilla } t.$$

Tasaisella kiihtyvyydellä liikkuminenkin voidaan määritellä. Liike on liikettä tasaisella kiihtyvyydellä, jos on olemassa nopeus v ja kiihtyvyys a, joille

$$f(t) = vt + \frac{1}{2}at^2 \text{ kaikilla } t.$$

∃: Mitä tasaisella kiihtyvyydellä liikkuminen tarkoittaa?

∀: Se tarkoittaa sitä, että nopeus kasvaa vakiotahtia.

∃: Ai vähän samaan tapaan, kuin paikan koordinaatti kasvaa vakiotahtia tasaisella nopeudella liikuttaessa?

∀: Juuri niin.

Jatkuvaa liikettä on paljon muutakin kuin tasaisella nopeudella ja tasaisella kiihtyvyydellä tapahtuva liike. Jos hidastat polkemisnopeuttasi aina välillä ihaillaksesi maisemia, on liikeesi jatkuvaa, mutta sinun vaikeampi löytää kaavaa kuvaamaan paikkaasi ajan funktiona.

∃: Jos vain ihailee maisemia, ei siinä paljoa kaavoja muodosteta.

∀: Minä kyllä luulen Tuomaksen tarkoittaneen, että tässä tapauksessa liikefunktio on sen verran monimutkainen, että sille on vaikea löytää kaavaa.

Tai ajattele kärpäsen hyörinää katossa. Senkin liike on jatkuvaa, mutta sen liikettä kuvaava kaava olisi hyvin monimutkainen.

Kuinka sitten voisi kehittää matemaattisen teorian, jonka avulla voimme tehdä eron jatkuvan muutoksen (polkupyöräily, kärpäsen lento) ja ei-jatkuvan muutoksen (Spockin teleporttaus) välille? Kysymys ei ole kovin helppo, ja matemaatikot ryhtyivät ratkomaan sitä joskus 1600-luvulla. Tyydyttävä teoria saatiin kehitettyä vasta pari sataa vuotta myöhemmin.

∃: Ja vielä tänäkin päivänä yliopisto-opettajat repivät hiuksia päästään yrittäessään opettaa sitä uusille opiskelijoille.

Jatkuvaa ja epäjatkuvaa muutosta voi tapahtua muuallakin kuin pelkästään liikuttaessa. Jos esimerkiksi ämpäriin valuu vettä putkesta, voidaan prosessia ajatella jatkuvana funktiona f, jossa lähtöjoukon pisteet ovat ajanhetkiä ja funktion arvot ovat vesimääriä ämpärissä kullakin ajanhetkellä.

> **∀:** Minkähänlaista olisi sitten epäjatkuva veden määrän muutos?
>
> **∃:** Jos vaikka ilkeä demoni loitsisi ämpärin tyhjäksi.
>
> **∀:** Tai hyvä haltia voisi taikoa puoli litraa lisää vettä silmänräpäyksessä.

Matemaattista teoriaa muodostettaessa kannattaa abstrahoida pois se, millaisia suureita tutkimme. Paikkaa 1-ulotteisessa koordinaatistossa ja veden määrää ämpärissä voidaan kumpiakin kuvata reaaliluvulla. Näin ollen oletamme, että f:n arvot ovat reaalilukuja, ja unohdamme sen, että käytännön tilanteissa ne voivat olla paikkoja 1-ulotteisessa maailmankaikkeudessa tai veden määriä ämpärissä. Samalla tavalla abstrahoimme pois myös sen, että funktion f lähtöjoukon pisteet ovat ajanhetkiä, ja oletamme niidenkin olevan vain reaalilukuja.

> **∃:** Onkohan tästä viimeisestä askeleesta hyötyä? Voisikohan olla tilanne, jossa kahden seikan välillä on jatkuva riippuvuussuhde ilman, että toinen seikoista on aika?
>
> **∀:** Kai sellaisenkin tilanteen voisi löytää, jos olisi tarpeeksi mielikuvitusta. Taidamme jättää kysymyksen lukijalle harjoitustehtäväksi.

Näin olemme saaneet muutettua kysymyksen

> Kuinka jatkuvuus määritellään matemaattisesti?

hiukan yksinkertaisempaan muotoon

> Kuinka funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvuus määritellään matemaattisesti?

> **∃:** Nyt Tuomas kyllä huijaa pikkaisen. Kärpäsen lento ei ole yksiulotteista, vaan kärpäsen paikka pitää ilmaista kolmella koordinaatilla.

∀**:** Tällaisessa tapauksessa kärpäsen paikkafunktioita on kolme, $X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $Z: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joista ensimmäinen antaa paikan x-, toinen y- ja kolmas z-koordinaatin. Jotta kärpäsen lento olisi jatkuvaa, täytyy kaikkein kolmen funktion olla jatkuvia.

∃**:** Osaisimme siis ratkaista tämänkin kysymyksen, jos tietäsimme, milloin $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva.

∀**:** Hmm. . . Itse asiassa Tuomas huijaa hiukan toisellakin tavalla.

∃**:** Kuinka niin?

∀**:** Tuomas olettaa, että f on määritelty kaikilla reaalilukuarvoilla.

∃**:** Se vastaisi jatkuvan liikkeen tapauksessa tilannetta, jossa liikkuja on aloittanut matkansa hamaassa menneisyydessä, eikä lopeta matkaansa koskaan.

∀**:** Jos liikkuja aloittaa matkansa hetkellä 0 ja lopettaa matkansa hetkellä 1, voimme kuvitella, että hän seisoo kaikilla negatiivisilla ajanhetkillä pisteessä, jossa hän oli hetkellä 0, ja että hän on ykköstä suuremmilla ajanhetkillä paikassa, jossa hän on hetkellä 1.

∃**:** Tuo on tietty fiktiota, mutta sen avulla saamme jatkuvan liikkeen ahdettua Tuomaksen matemaattiseen viitekehykseen.

Palataan pohtimaan Spockin teleporttausta. Hetkellä, jolla Spock teleporttaa, on Spockin liikkeessä epäjatkuvuuskohta. Jotta saisimme kysymämme kysymyksen vieläkin hiukan yksinkertaisemmaksi, unohdamme funktion f jatkuvuuden joksikin aikaa. Valitsemme ajanhetken t_0 ja kysymme:

> Kuinka määritellään matemaattisesti, että Spockin liikkeessä on epäjatkuvuuskohta hetkellä t_0?

Kun abstrahoimme pois fysikaalisen painolastin kysymyksestä, se muuttuu seuraavaan helpommin käsiteltävään muotoon. Olkoon x_0 piste reaaliakselilla.

> Kuinka määritellään matemaattisesti, että funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on epäjatkuvuuskohta pisteessä x_0?

Sanomme, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x_0, jos f:llä ei ole epäjatkuvuuskohtaa pisteessä x_0. Näin olleen mielenkiinnon kohteenamme oleva kysymys muuttuu muotoon

> Kuinka määritellään matemaattisesti, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x_0?

Jos saamme tämän kysymyksen ratkaistua, voidaan yleinen ongelma jatkuvuudesta ratkaista.

∃: Joo! Funktio on jatkuva, jos sillä ei ole epäjatkuvuuskohtaa missään.

∀: Tai sama toisella tavoin ilmaistuna: Funktio on jatkuva, jos se on jatkuva lähtöjoukon jokaisessa pisteessä.

∃: Ja koko ongelma on ratkaistu! Voidaan taas jatkaa pelaamista.

∀: Äläpä vielä innostu. Emme nimittäin vielä tiedä, kuinka jatkuvuus jossain pisteessä määritellään.

∃: Ai niin. Emme tiedä, kuinka epäjatkuvuuskohta määritellään, joten emme myöskään tiedä, kuinka jatkuvuus jossain pisteessä määritellään.

Yksinkertaistetaan vielä tilannetta hiukan. Oletetaan, että tutkitaan funktion f jatkuvuutta pisteessä 0, ja oletetaan, että $f(0) = 0$.

∃: Minähän sanoin, että olisi coolia valita matkan alkamishetkeksi -1.

∀: Mitä tekemistä sillä on tämän kanssa?

∃: Koska Tuomas tutkii jatkuvuutta pisteessä 0, hänen olettaa, että liikkumisprosessi on ollut käynnissä jo negatiivisillakin ajanhetkillä.

Kysytään

> Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $f(0) = 0$. Milloin funktio f on jatkuva pisteessä 0?

Tähän kysymykseen vastaa jatkuvuuspeli.

∃: Ja yleiseen kysymykseen jatkuvuudesta pisteessä x_0 vastaa peli, jonka säännöt ovat seuraavat: Ensin ∀ valitsee arv...

∀: Hyss! Sitä ei saa paljastaa vielä. Tuomas on jättänyt kyseisen pelin muotoilemisen lukijalle tehtäväksi 11.

∃: Hyvä on. Keskitytään sitten vielä kysymykseen, milloin funktio f, jolle $f(0) = 0$, on jatkuva pisteessä 0.

11.3 Jatkuvuuspeli

Alla tutkimme jatkuvuuspeliä[3], jossa voittostrategian olemassaolo heijastelee funktion jatkuvuutta ja epäjatkuvuutta pisteessä 0. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $f(0) = 0$. Funktio f on jatkuva pisteessä 0, jos f:n arvot ovat lähellä nollaa, kun funktion arvoja tarkastellaan lähtöjoukon pisteissä, jotka ovat lähellä nollaa. Edellinen luonnehdinta jatkuvuudelle pisteessä 0 on epämääräinen johtuen epämääräisestä sanasta ”lähellä”, ja tulemme saamaan pelin avulla täsmällisemmän luonnehdinnan.

Aloitamme kuitenkin pelkästä jatkuvuuspelistä, ja palaamme ominaisuuteen ”f on jatkuva pisteessä 0” luvussa 5.

Määritelmä 1 Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $f(0) = 0$. Funktion f jatkuvuuspelin säännöt ovat seuraavat:

- Ensin ∀ sanoo jonkun positiivisen reaaliluvun, jota merkitään symbolilla ϵ.

∀: ϵ lausutaan ’epsilon’.

[3] Jatkuvuuspeli kiertelee folklorena paikoissa, joissa jatkuvuuden alkeita opetetaan. Minulla ei ole harmainta aavistusta sen alkuperäisestä kehittäjästä. Oppikirjoista löytyy yleensä pelimääritelmän kanssa yhtäpitävä, mutta erilainen ja hiukan abstraktimpi määritelmä jatkuvuudelle.

- Seuraavaksi $\exists$ sanoo jonkun positiivisen reaaliluvun, jota merkitään symbolilla δ.

  $\exists$: δ lausutaan 'delta'.

- Sitten $\forall$ sanoo reaaliluvun, jota merkitään symbolilla x, ja joka toteuttaa ehdon $|x| < \delta$.

  $\forall$: x lausutaan 'äks'.

  $\exists$: Kyllä lukija sen tietää, pölhö.

Nyt $\exists$ voittaa pelin, jos $|f(x)| < \epsilon$. Muutoin $\forall$ voittaa pelin.

$\forall$: Lukija, älä säikähdä, vaikka et vielä ymmärtäisikään jatkuvuuspelin ja jatkuvuuden välistä yhteyttä.

$\exists$: Pelien pelaaminen on hauskaa, vaikka peleillä ei olisikaan yhteyttä mihinkään suurempaan.

$\forall$: Jatka vain lukemista.

Nyt tunnemme jatkuvuuspelin säännöt. Vilkaistaan seuraavaksi ihan nopeasti, miltä tyypillinen jatkuvuuspeli näyttää.

$\exists$: Pelataan jatkuvuuspeli funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(0) = 0$, ja $f(x) = \frac{1}{x}$, kun $x \neq 0$.

$\forall$: Pelaan ϵ:n arvon $1,5$!

$\exists$: Pelaan δ:n arvon 1!

$\forall$: Pelaan x:n arvon $-0,5$! Koska $|-0,5| = 0,5 < 1 = \delta$, siirtoni on sääntöjen mukainen.

$\exists$: Kumpihan voittaa? Lasketaan!

$\forall$: $|f(x)| = |\frac{1}{-0,5}| = |-2| = 2 > 1,5 = \epsilon$. Voitin!

Palataan vielä jatkuvuuspelin sääntöihin. Luvuilta δ ja ϵ ei vaadita muuta kuin se, että ne ovat positiivisia reaalilukuja.

$\forall$ ja $\exists$: Osaamme kyllä valita positiivisia reaalilukuja!

Pelaajan $\forall$ valinnan x täytyy toteuttaa ehto $|x| < \delta$.

∀: Tuossa δ voi olla mikä tahansa tahansa positiivinen reaaliluku. Pystynköhän aina valitsemaan luvun x, joka toteuttaa ehdon $|x| < \delta$?

∃: $|x| < \delta$ tarkoittaa samaa kuin $-\delta < x < \delta$. Muistelehan hiukan välipeliä.

Tehtävä 2

Jatkuvuuspelin sääntöjen mukaan ∀:n valinnan x täytyy toteuttaa ehto $|x| < \delta$. Valinta $x = 0$ toteuttaa aina edellisen ehdon, koska δ on positiivinen. Niinpä ∀:n on aina mahdollista pelata sääntöjen mukaan. Onko ∀:n sääntöjen puitteissa mahdollista valita aina positiivinen x? Entä negatiivien x?

∀: Lukija, kun teet tehtäviä, muista aina perustella itsellesi, miksi löytämäsi ratkaisu on oikea.

∃: Voit myös katsoa ratkaisun tämän kirjoitelman lopusta.

∀: Kannattaa kuitenkin ensin yrittää itse ratkaista tehtävä. Vaikka et keksisikään ratkaisua, on malliratkaisun ymmärtäminen helpompaa, kun on itse ensin pohtinut hiukan.

∃: Kun lunttaa malleista, on helppo voittaa.

∀: Tuomas on antanut malliratkaisut ilman perusteluja, ja sinun täytyy itse keksiä perustelu, miksi ehdotettu malliratkaisu toimii.

∃: Jos sinulla on hahmotusvaikeuksia, voit myös piirrellä kuvia tilanteesta.

∀: Siis sellaisia, joissa on funktion kuvaaja koordinaatistossa, ja jossa ϵ on merkitty y-akselille ja δ on merkitty x-akselille. Koska tutkit itseisarvoja, voi olla hyödyllistä myös merkitä y-akselille $-\epsilon$ ja x-akselille $-\delta$.

11.4 Ja ei kun pelaamaan

Edellisen luvun lopussa totesimme, että jatkuvuuspelissä molemmat pelaajat pystyvät aina noudattamaan sääntöjä. Seuraavaksi alamme tutkia sitä, kuinka pelaajien kannattaa pelata voittaakseen.

$\exists$: Pelataan jatkuvuuspeli funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^3$ kaikilla x.

$\forall$: Selvä, pelaan ϵ:n arvon $0,1$!

$\exists$: Pelaan δ:n arvon $0,05$!

$\forall$: Pelaan x:n arvon $-0,01$! Koska $|x| = |-0,01| < 0,05 = \delta$, on lausahdukseni sääntöjen mukainen.

$\exists$: $|f(x)| = |(-0,01)^3| = |0,000001| < 0,1 = \epsilon$, voitin!

Tehtävä 3

Palataan edellisessä esimerkkipelissä kohtaan, jossa $\exists$ on valinnut δ:n arvon $0,05$, ja $\forall$ pohtii omaa x:n arvon valintaansa. Olisiko $\forall$:n mahdollista valita (sääntöjen puitteissa) sellainen x, jolla hän voittaisi pelin?

$\forall$: Jatkuvuuspelin säännöt vaativat, että $f(0) = 0$. Muistiko lukija tarkistaa, että edellisen esimerkkipelin f toteuttaa tämän ehdon?

Mikäli lukija teki edellisen tehtävän, hän havaitsi, että $\exists$ pystyi luomaan tilanteen, jossa hän voittaa varmasti. Seuraavaksi on lukijan vuoro luoda tällaisia tilanteita.

Tehtävä 4

1.	**∃:** Pelataan jatkuvuuspeli funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = 5x$ kaikilla x. **∀:** $\epsilon = 0,1!$ **∃:** Lukija, olisitko kiltti ja auttaisiko minua löytämään sellaisen δ:n arvon, jolla voitan pelin varmasti?
2.	**∃:** Pelataan uudestaan samalle funktiolle. **∀:** $\epsilon = 0,001!$ **∃:** Lukija, autatko uudelleen? Tahdon taas voittaa varmasti.
3.	**∃:** Pelataan vielä kerran samalle funktiolle. **∀:** $\epsilon = 0,000001!$ **∃:** Lukija, tänne ja heti! Tahdon voittaa!

Nyt olemme tutkineet, kuinka ∃:n kannattaa pelata tietyissä tilanteissa. Seuraavaksi etsitään menetelmiä, joilla ∃ voittaa koko pelin.

∃: Pelataan jatkuvuuspeli funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = 50x$ kaikilla x.

∀: $\epsilon = 0,1!$

∃: $\delta = 0,002!$

∀: $x = 0,001!$ Koska $x = 0,001 < 0,002 = \delta$, on lausahdukseni sääntöjen mukainen.

∃: $|f(x)| = 50 \cdot 0,001 = 0,05 < 0,1 = \epsilon$. Voitin.

∀: Pelataan uudestaan. $\epsilon = 0,01!$

∃: $\delta = 0,0002!$

∀: $x = 0,00019!$ Koska $x = 0,00019 < 0,0002 = \delta$, on lausahdukseni sääntöjen mukainen.

∃: $|f(x)| = 50 \cdot 0,00019 < 0,01 = \epsilon$. Voitin.

∀: Pelataan uudestaan. $\epsilon = 0,001!$

∃: $\delta = 0,00002!$.

∀: $x = 0,000019999!$ Koska $x = 0,000019999 < 0,00002 = \delta$, on lausahdukseni sääntöjen mukainen.

∃: $|f(x)| = 50 \cdot 0,000019999 < 0,001 = \epsilon$. Voitin.

∀: Sinä voitat koko ajan. Miten ihmeessä teet sen?

∃: Katsos, jos sinä sanot minkä tahansa ϵ:n arvon, minä valitsen δ:n arvon $\epsilon/50$.

∀: Niinpä. Säännöt vaativat, että $|x| < \delta = \epsilon/50$, jolloin

$$|f(x)| = 50|x| < 50\delta = 50\epsilon/50 = \epsilon.$$

Valitsinpa minkä tahansa sääntöjen salliman x:n arvon, on väistämättä $|f(x)| < \epsilon$. Sinä ryökäle voitat, yritinpä pelata kuinka hyvin tahansa.

∃: Joo. δ:n valinta $\epsilon/50$ on voittostrategia tälle funktiolle.

Tehtävä 5

Etsi pelaajalle $\exists$ voittostrategia jatkuvuuspelissä seuraaville funktioille f.

> **$\exists$:** Ei voittostrategian löytäminen ole sen vaikeampaa kuin edellisen tehtävän tekeminenkään. Nyt täytyy vain varautua edeltä käsin kaikkiin juoniin, joita $\forall$ voi ϵ:n valinnan kanssa keksiä.

1. $f(x) = 0$ kaikilla x.
2. $f(x) = x$ kaikilla x.
3. $f(x) = 100000x$ kaikilla x.
4. $f(x) = 6x$, jos $x \leq 0$, ja $f(x) = 100x$, jos $x > 0$.
5. $f(x) = x^2$ kaikilla x.
6. $f(x) = \sqrt{|x|}$ kaikilla x.
7. $f(x) = x$, jos x on rationaalinen ja $f(x) = 0$, jos x on irrationaalinen.
8. $f(x) = 0$, jos $x < 1$, ja $f(x) = 1000000$, jos $x \geq 1$.

9. $f(x) = x^2 + x$ kaikilla x.

> **∃:** Kylläpä tuo edellinen kohta oli hankala. Ihan tuli hiki pelatessa.
>
> **∀:** Miltähän sitten lukijasta tuntuu?
>
> **∃:** Enpä tiedä. Pitäisiköhän lukijaa varoittaa?
>
> **∀:** Joo. Lukija! Jos edellinen kohta tuntuu liian hankalalta, voit jättää sen tekemättä.

10. $f(0) = 0$, ja $f(x) = 5x\sin(\frac{1}{x})$, kun $x \neq 0$.

> **∀:** Onkohan tuossa sinin lähtöarvo asteita vai radiaaneja?
>
> **∃:** En minä tiedä. Luulisin, että Tuomas käyttää radiaaneja.
>
> **∀:** f taitaa olla eri funktio riippuen siitä, kumpi vaihtoehto valitaan, mutta pelin idea on sama kummassakin tapauksessa.
>
> **∃:** Sovitaan sitten, että sinin lähtöarvo on radiaaneja.

> **∀:** Kylläpä mieleni olisi tehnyt sanoa edellisissä tehtävissä äärettömän pieni ϵ. Sellaisen yli olisi tosi helppoa päästä $|f(x)|$:llä.
>
> **∃:** Niin, mutta positiivisten reaalilukujen joukossa ei ole äärettömän pieniä lukuja. Muistathan, kuinka kävi välipelissä? Ei ole olemassa pienintä positiivista reaalilukua.
>
> **∀:** Ikävää. Minun on tyydyttävä hyvin pieneen ϵ:hen.
>
> **∃:** Mutta useissa tapauksissa on olemassa riittävän pieni ϵ. Katso vaikka seuraavaa esimerkkiä.

Esimerkki 2 Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 0$, jos $x = 0$, ja $f(x) = 100 + |x|$, jos $x \neq 0$. ∀:lla on seuraava voittostrategia:

- Ensin ∀ sanoo ϵ:nä luvun 50.

- Sitten $\exists$ sanoo jonkun luvun δ. (Koska $\forall$:n voittostrategian tulee johtaa $\forall$:n voittoon tekipä $\exists$ mitä tahansa, emme voi olettaa luvusta δ muuta kuin että se on positiivinen reaaliluku.)

- Sitten $\forall$ valitsee x:nä luvun $\delta/2$. Koska $|x| = \delta/2 < \delta$, on $\forall$:n lausahdus luvallinen. (Olennaista on se, että sanoipa $\exists$ minkä luvun δ tahansa, menetelmämme antaa $\forall$:lle toimivan x:n valinnan.)

Nyt $|f(x)| = 100 + |x| > 50 = \epsilon$, joten $\forall$ voittaa pelin. Siis menetelmämme johtaa $\forall$:n voittoon yrittipä $\exists$ mitä tahansa, joten $\forall$:lla on voittostrategia.

> **$\exists$:** Pelataan jatkuvuuspeli funktiolle $f(x) = 0$, jos $x = 0$, ja $f(x) = 100 + |x|$ muutoin.
>
> **$\forall$:** [Hykertelee itsekseen: Nyt minä kyllä voitan varmasti.] $\epsilon = 50$!
>
> **$\exists$:** $\delta = 0,01$!
>
> **$\forall$:** $x = 0,005$! Nyt $|x| < \delta$, joten pelaan sääntöjen mukaan. $|f(x)| = 100 + 0,005 > 50 = \epsilon$. Voitinpas kerrankin!

Tehtävä 6

Etsi pelaajalle $\forall$ voittostrategia jatkuvuuspelissä seuraaville funktioille f.

1. $f(x) = 0$, kun $x \leq 0$, ja $f(x) = 1$, kun $x > 0$.
2. $f(x) = 0$, kun $x \geq 0$, ja $f(x) = \frac{1}{100000}$, kun $x < 0$.
3. $f(x) = 0$, kun x on rationaaliluku, ja $f(x) = 1$, kun x on irrationaaliluku.
4. $f(x) = 0$, kun $x = 0$, ja $f(x) = \frac{1}{100000} - |x|$, kun $x \neq 0$.
5. $f(x) = 0$, kun $x = 0$, ja $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$, kun $x \neq 0$.

11.5 Jatkuvuuspeli ja jatkuvuus

$\exists$: Tämä luku taitaa olla tylsää teoriaa. Lähdenpä tästä suoraan seuraavaan lukuun pelaamaan pelejä.

$\forall$: Älähän nyt. Vaikka tätä lukua ei välttämättä tarvitakaan pelatessa, täällä selitetään, mitä järkeä tässä pelaamistouhussa ylipäätänsä on.

$\exists$: No katsotaan sitten.

Jatkuvuuspelissä $\exists$ yrittää osoittaa, että väite "funktion f arvot ovat lähellä nollaa, kun tutkitaan arvoja pisteissä, jotka ovat lähellä nollaa" on tosi. $\forall$ yrittää osoittaa, että kyseinen väite on epätosi. $\forall$ yrittää toisin sanoen osoittaa, että lähellä nollaa olisi pisteitä, joissa funktio f saa kaukana nollasta olevia arvoja.

$\forall$ yrittää valita sellaisen luvun ϵ, että lähellä nollaa olisi pisteitä, joissa funktio saa arvoja, jotka ovat kaukana nollasta, vähintään ϵ:n päässä.

$\forall$: Minun on tietysti edullista valita hyvin pieni ϵ:n arvo, jotta $|f(x)|$:llä olisi helppo päästä sen yli.

Sitten $\exists$ valitsee luvun δ, joka kuvaa sitä, kuinka lähellä nollaa olevia lähtöjoukon pisteitä $\forall$ voi tutkia.

$\exists$: Minun on tietysti edullista valita hyvin pieni δ:n arvo, että $\forall$:lla olisi mahdollisimman vähän valinnanvaraa x:n kanssa.

Sitten $\forall$ valitsee luvun x, joka on lähellä nollaa, alle δ:n etäisyydellä nollasta.

$\forall$: Yritän tietysti valita sellaisen luvun x, että $|f(x)|$ on vähintään ϵ.

$\exists$ voittaa, jos $|f(x)|$ on lähellä nollaa, kun "lähellä" tarkoittaa, että $|f(x)| < \epsilon$.

Yksittäinen peli voidaan mieltää yksittäisenä kokeena, jossa tutkitaan f:n jatkuvuutta. Funktio f on jatkuva pisteessä 0, mikäli $\exists$:llä on menetelmä, jolla hän kykenee kääntämään kaikki kokeet omaksi voitokseen. Funktio f on epäjatkuva pisteessä 0, mikäli sellainen menetelmä on $\forall$:lla.

Määritelmä 3 Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, on jatkuva pisteessä 0, jos $\exists$:llä on voittostrategia jatkuvuuspelissä funktiolle f. Funktio f on epäjatkuva pisteessä 0, jos $\forall$:lla on voittostrategia jatkuvuuspelissä funktiolle f.

$\forall$: Nyt Tuomas meni määrittelemään jatkuvuuden meidän peliemme avulla.

$\exists$: Meille tulee kyllä aika paljon puuhaa, jos joudumme pelaamaan aina kun joku funktio halutaan osoittaa jatkuvaksi tai epäjatkuvaksi.

$\forall$: Ja yhden funktion osoittaminen jatkuvaksi tai epäjatkuvaksi vaatii äärettömän monta peliä, yhden jokaista mahdollista valintasarjaa (ϵ, δ, x) kohti.

$\exists$: Huh huh! Mutta onko asia siltikään noin? Yleisen menetelmän voi todeta oikeaksi käymättä läpi kaikkia vaihtoehtoja. Sitä kutsutaan matemaattiseksi päättelyksi.

$\forall$: Ai siksikö Tuomas käyttää x:ää, ϵ:tä ja δ:aa konkreettisten numeroarvojen sijaan?

$\exists$: Niin tietysti, pöhkö! Hän voi käsitellä noiden symbolien avulla äärettömän monta konkreettisia numeroarvoja sisältävää erikoistapausta kirjoittamalla vain pari riviä tekstiä.

$\exists$: Oletetaan, että Spock kulkee hetkillä t, $t < 0$, tasaisella nopeudella 1 eteenpäin, ja että hän hetkellä 0 teleporttaa 10 mittayksikköä eteenpäin, ja jatkaa matkaansa tämän jälkeen tasaisella nopeudella 1. Hetkellä 0 Spock on paikassa 0, ja tämän jälkeen hän on siirtynyt 10 yksikköä eteenpäin. Minkähänlainen on Spockin liikefunktio?

$\forall$: Nyt $f(t) = t$, jos $t \leq 0$ ja $f(t) = 10 + t$, jos $t > 10$.

$\exists$: Pelataan jatkuvuuspeli Spockin liikefunktiolle.

$\forall$: $\epsilon = 5$!

$\exists$: $\delta = 0,1$!

$\forall$: $x = 0,01$!

$\exists$: Hups! Nyt muuten x on funktion f lähtöjoukon piste, eli ajanhetki.

$\forall$: On kyllä hiukan harhaanjohtava notaatio. Kuitenkin hetkellä $x = 0,01$ Spock on paikassa $f(0,01) = 10 + 0,01$, eli yli $\epsilon = 5$:n yksikön päässä paikasta 0. Voitin.

$\exists$: Oletko muuten miettinyt, että silmänräpäyksellinen eteenpäinsiirtyminen ei ole ainoa esimerkki niistä tavoista, joilla funktio voi olla epäjatkuva pisteessä 0. Ajatellaanpa esimerkiksi tehtävän 6.5 funktiota $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$, jos $x \neq 0$, ja $f(0) = 0$.

$\forall$: Miltähän näyttäisi, jos Spock kulkisi tuon funktion osoittamalla tavalla?

$\exists$: Hetkellä 0 hän olisi paikassa 0, ja muilla hetkillä hän poukkoilisi pisteiden -1 ja 1 välissä.

$\forall$: Rajoitutaan ensin tutkimaan negatiivisia ajanhetkiä. Spockin poukkoilu yhä kiihtyisi ja kiihtyisi, kun tarkastelisimme ajanjaksoja, jotka olisivat yhä lähempänä ja lähempänä nollaa.

$\exists$: Positiivisilla arvoilla taas poukkoilu yhä hidastuisi ja hidastuisi.

$\forall$: Olisi se kyllä aika hassun näköistä. Tästä kyllä kannattaa piirtää kuva koordinaatistoon.

$\exists$: Kuka sitä viitsisi piirellä käsin enää nykyaikana? Ainakin minä aion käyttää graafista laskinta.

$\forall$: Funktion kuvaajan hahmotteleminen käsin voi olla ihan opettavaista.

$\forall$: Muistatko vielä sen väittelyn, jossa mietimme, kulkeeko 120 kilometriä tunnissa kulkeva auto niin lyhyitä matkoja kuin ikinä voin keksiä?

$\exists$: Joo. Jos ilmaisemme ajan tunneissa ja paikan kilometreissä, auton liikettä kuvaa funktio $f(x) = 120x$. Mitä siitä?

$\forall$: Silloinhan minä valitsin lyhyen etäisyyden, jota jatkuvuuspelissämme vastaa ϵ, ja sinä valitsit lyhyen ajanjakson, jota jatkuvuuspelissämme vastaa δ.

$\exists$: Niin, mutta silloin sinä et valinnut x:ää. Silloin tutkimme vain funktion arvoa $f(\delta)$.

$\forall$: Pelasimme siis seuraavaa peliä: Ensin minä valitsen luvun $\epsilon > 0$, ja sitten sinä valitset luvun $\delta > 0$. Sinä voitat, jos $|f(\delta)| < \epsilon$, ja minä voitat muulloin.

$\exists$: Kuinkahan kävisi, jos pelaisimme tätä peliä tehtävän 6 funktioille?

Tehtävä 7

Tutki edellisessä dialogissa kuvattua peliä. Millä tehtävän 6 funktioista $\exists$:llä on voittostrategia tässä pelissä, ja millä tehtävän 6 funktioista $\forall$:lla on voittostrategia?

$\exists$: Ylläoleva peli, jossa valitaan vain ϵ ja δ, ei taida kuvata kunnolla jatkuvuutta.

$\exists$: Lukija, keksitkö esimerkkifunktiota f niin, että ylläolevassa pelissä funktiolle f minun kannattaisikin valita hyvin suuri δ?

$\forall$: Jatkuvuuspelissä minä saan lisäksi valita luvun x. Kuinka kävisi jatkuvuuspelissä lukijan esimerkkifunktiolle f, jos $\exists$ yrittäisi valita suuren δ:n?

$\exists$: Taidamme jättää kysymyksen lukijalle.

11.6 Muutetaan sääntöjä

∀: Tuo lurjus ∃ voittaa koko ajan. Nyt muutetaan kyllä sääntöjä.

∃: Mutta minä valitsen vain yhden suureen, ja sinä saat valita kaksi.

∀: Mutta on edullista valita myöhäisessä vaiheessa, ja sinä saat valita δ:n minun ϵ:n valintani jälkeen.

∃: Ok, pelataan sitten niin, että minä valitsen δ:n ennen kuin sinä valitset ϵ:n.

Tehtävä 8

Lokaali triviaalisuuspeli on muuten samanlainen kuin jatkuvuuspeli, mutta $\exists$ sanoo luvun δ ennen kuin $\forall$ sanoo luvun ϵ. Kummalla pelaajalla on voittostrategia lokaalissa triviaalisuuspelissä seuraaville funktiolle f?

$\forall$: Kuinkas se lokaali triviaalisuuspeli nyt oikein menikään?

$\exists$: Minä aloitan valitsemalla luvun δ, $\delta > 0$.

$\forall$: Hmm. . . ja seuraavaksi on minun vuoroni valita ϵ, $\epsilon > 0$.

$\forall$: Mutta sittenhän on minun vuoroni uudestaan. Valitsen luvun x, $|x| < \delta$

$\exists$: Ja sitten $|f(x)| < \epsilon$, ja minä voitan taas.

$\forall$: Äläpä ole niin varma. Hyvällä pelistrategialla voi käydä niin, että $|f(x)| \geq \epsilon$, ja minä voitan.

1. $f(x) = 0$ kaikilla x.
2. $f(x) = x$ kaikilla x.
3. $f(x) = 0$ jos $x < 1$, ja $f(x) = 1$ muutoin.
4. $f(x) = 0$, jos $-1/10 < x < 1/10$, ja $f(x) = 1$ muutoin.

$\exists$: Löydätkö yleistä luonnehdintaa sille, millainen funktion f olisi oltava, että minulla olisi voittostrategia lokaalissa triviaalisuuspelissä?

$\exists$: Nyt on minun vuoroni muuttaa sääntöjä.

$\forall$: Eikä, sinä voitat vieläkin liikaa.

$\exists$: Tehdäänpä seuraavasti! Sinä saat valita sekä ϵ:n että δ:n.

$\forall$: (Onkohan tähän koira haudattuna?) Haluat siis valita vain x:n? Jos valitset aina $x = 0$, voitat varmasti.

$\exists$: Ok, en valitse arvoa $x = 0$.

Tehtävä 9

Kasautumispistepeli on muuten samanlainen kuin jatkuvuuspeli, mutta pelaaja $\forall$ saa valita luvut ϵ ja δ, ja pelaaja $\exists$ saa valita luvun x, mutta x:n pitää toteuttaa ehdot $x \neq 0$ ja $|x| < \delta$.

> $\forall$: Käydäänpä vielä läpi kasautumispistepelin säännöt. Ensin minä valitsen luvut $\epsilon > 0$ ja $\delta > 0$.
>
> $\exists$: Ja sitten minä valitsen luvun x, jolle $|x| < \delta$.
>
> $\forall$: Muista, että lupasit olla valitsematta nollaa.
>
> $\exists$: Niinpä. Minä valitsen luvun x, jolle $|x| < \delta$ ja $x \neq 0$.
>
> $\forall$: Ja sitten tuo $\exists$ voittaa, jos $|f(x)| < \epsilon$. Muutoin minä voitan.

Millä esimerkin 1 ja tehtävien 5 ja 6 funktioista pelaajalla $\exists$ on voittostrategia kasautumispistepelissä? Tutki kasautumispistepeliä myös tehtävän 7 ratkaisussa mainitulle funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{x}$.

$\exists$: On tylsää tutkia jatkuvuutta aina vain lähtöjoukon pisteessä 0.

$\forall$: Joo, pitäisi kai kehittää peli, jolla jatkuvuutta voisi tutkia muuallakin.

$\forall$: Vaikeaa, luvun x etäisyys nollasta saadaan kaavalla $|x|$. Mutta entäs luvun x etäisyys luvusta a?

$\exists$: Helppoa! Se on tietysti $|x - a|$.

Tehtävä 10

Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, joka saa arvon 0 pisteessä a. Funktio g on jatkuva pisteessä a, jos funktion g arvot ovat lähellä arvoa 0, kun funktiota tarkastellaan lähellä pistettä a. Määrittele peli, jolla voidaan testata, onko g jatkuva pisteessä a.

> **∃:** Arvon 0 pisteessä a? Mitä se tarkoittaa?
>
> **∀:** Se taitaa tarkoittaa sitä, että ensin valitaan reaaliluku a ja sitten määritellään peli sellaisille funktioille g, joille $g(a) = 0$.
>
> **∃:** Niin. Alussahan Tuomas valitsi luvun $a = 0$, ja määritteli pelin sellaisille funktioille f, joille $f(0) = 0$.
>
> **∀:** Entä jos lukija on vieläkin sekaisin?
>
> **∃:** Hän voi vaikka määritellä jatkuvuuden pisteessä $a = 1$ sellaisille funktioille g, joille $g(1) = 0$.
>
> **∀:** Näppärää! Ja sitten ykkösen paikalle voidaan laittaa muita lukuja.

Määriteltyäsi pelin kokeile määritelmäsi oikeellisuuta jatkuviksi ja epäjatkuviksi tietämilläsi funktioilla.

> **∃:** Entä jos haluaisimme tutkia sellaisen funktion jatkuvuutta, joka saa tarkastelupisteessä jonkun muun arvon kuin 0?
>
> **∀:** Kai siihenkin olisi kehitettävissä peli.
>
> **∃:** Jos a on tarkastelupiste, ja x on sinun valitsemasi piste, pelissä tarvitaan arvojen $f(a)$ ja $f(x)$ etäisyyttä.

Tehtävä 11

Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, ja a jokin reaaliakselin piste. Funktio g on jatkuva pisteessä a, jos funktion g arvot ovat lähellä arvoa $g(a)$, kun funktiota tarkastellaan lähellä pistettä a. Määrittele peli, jolla voidaan testata, onko g jatkuva pisteessä a.
Määriteltyäsi pelin kokeile määritelmäsi oikeellisuuta jatkuviksi ja epäjatkuviksi tietämilläsi funktioilla.

$\forall$**:** Sellainenkin peli olisi hieno, jolla voisi tutkia, onko funktio jatkuva.

$\exists$**:** Emmekö tarkastelekaan juuri sitä edellisen tehtävän pelissä?

$\forall$**:** Itse asiassa emme. Tarkastelemme jatkuvuutta jossain tietyssä pisteessä. Funktio on jatkuva, jos se on jatkuva lähtöjoukon jokaisessa pisteessä.

$\exists$**:** Ratkaiseva ongelma lieneekin, että kumpi meistä saa valita pelissä tarkastelupisteen, ja missä vaiheessa peliä.

Tehtävä 12

Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, jos se on jatkuva jokaisessa $\mathbb{R}$:n pisteessä. Määrittele peli, jolla voidaan testata, onko f jatkuva. Määriteltyäsi pelin kokeile määritelmäsi oikeellisuutta jatkuviksi ja epäjatkuviksi tietämilläsi funktioilla.

$\exists$**:** Samalla tavalla kai voisi tutkia lukujonon suppenemistakin.

$\forall$**:** Erona on vain se, että jatkuvuuspelissä δ kannattaa valita ...

$\exists$**:** ...hyvin pieneksi! Tiedän kyllä oikein hyvin.

$\forall$**:** Joo. Suppenemispelissä pitäisi tarkastella pienten δ:n arvojen sijaan suuria x_n:ien indeksejä n.

Tehtävä 13

Määrittele peli, jolla voidaan testata, suppeneeko lukujono $x_1, x_2, x_3, \ldots$ kohti nollaa. Määriteltyäsi pelin kokeile määritelmäsi oikeellisuutta suppeneviksi ja ei-suppeneviksi tietämilläsi lukujonoilla.

11.7 Vastaukset

> **∃:** Tämähän on käytännöllinen luku. Täältä näkee, kuinka kannattaa pelata.
>
> **∀:** Mutta muista, että täällä on esitetty vain yhdet toimivat strategiat. Ne eivät ole ainoita oikeita.

1: Kun $\forall$ sanoo ℓ metriä, sanoo $\exists$ esimerkiksi $t = \ell/40$ sekuntia.

2: On. Luku $\delta/2$ on sääntöjen mukainen positiivinen valinta ja $-\delta/2$ on sääntöjen mukainen negatiivinen valinta.

> **∃:** Itse asiassa positiiviseksi valinnaksi kelpaa myös $\delta/3$ ja $\frac{2}{3}\delta$.
>
> **∀:** Tässä kysyttiin pelkästään sääntöjen sallimia valintoja. Minua kiinostaa se, millaisilla valinnoilla voitan!

3: $\forall$:n ei ole mahdollista valita voittavaa x:ää. Koska sääntöjen mukaan pitää olla $|x| < \delta = 0.05$, on $|f(x)| = |x^3| = |x|^3 \leq 0,05^3 < 0,1 = \epsilon$.

> **∀:** Muista, että x voi olla joko positiivinen tai negatiivinen.
>
> **∃:** Kannattaa miettiä molemmat vaihtoehdot erikseen läpi.
>
> **∀:** Entä tapaus $x = 0$?
>
> **∃:** Sekin täytyy ottaa huomioon, mutta se on helppo tapaus.

4.1 $\delta = 0,02$
4.2 $\delta = 0,0002$
4.3 $\delta = 0,0000002$

> **∀:** Tässä Tuomas on luetellut pelkästään suurimmat toimivat δ:t. Myös mitkä tahansa pienemmät kelpaavat.

5.1: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, $\exists$ sanoo $\delta = 1$ ja voittaa varmasti.

> **∀:** Edellisen kohdan peli on aika tyhmä. $\exists$ voittaa varmasti, sanoi hän mitä tahansa.

5.2: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun ϵ.

5.3: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun $\epsilon/100000$.

5.4: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun $\epsilon/100$.

$\exists$: Koska $|6x| \leq |100x|$ kaikilla x, pätee $|f(x)| \leq 100|x|$ kaikilla x.

5.5: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, toimii $\exists$ seuraavasti: Jos $\epsilon > 1$, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun 1. Muutoin $\exists$ sanoo lukuna δ luvun ϵ.

$\exists$: Myös valinta $\delta = \sqrt{\epsilon}$ toimii, mutta Tuomas taitaa hiukan kikkailla.

5.6: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun ϵ^2.

$\exists$: Neliöjuurifunktion kuvaaja nollassa on niin jyrkkä, että mikään δ:n valintastrategia tyyppiä $c\epsilon$ ei toimi.

$\forall$: Mitä tarkoittaa strategia tyyppiä $c\epsilon$?

$\exists$: Se tarkoittaa esimerkiksi strategiaa, jossa valitaan aina $0,1\epsilon$, tai $0,01\epsilon$, tai jotain sellaista.

$\forall$: Mutta, jos $\epsilon = 0,1$, voidaan valita $0,1\epsilon$, jos $\epsilon = 0,01$, voidaan valita $0,01\epsilon$ ja niin edelleen.

$\exists$: Eipäs. Jos puhun strategiasta tyyppiä $c\epsilon$, täytyy saman luvun c toimia kaikilla ϵ:in arvoilla.

5.7: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun $\epsilon/2$.

$\exists$: Onpa hyvä, että tarkastellaan jatkuvuutta nollassa. Tämä funktio ei taitaisikaan olla jatkuva missään muussa pisteessä.

$\forall$: Mitä tarkoittaa ”jatkuvuus jossain muussa pisteessä?”

$\exists$: Katso tehtäviä 10 ja 11.

$\forall$: Taidan kuitenkin odottaa, että lukija pääsee sinne saakka. Matemaattista tekstiä lukiessa ei kannata pomppia liikaa.

5.8: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun 1.

5.9: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ pienemmän luvuista $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2}\epsilon$.

$\exists$: Kun δ on kuten yllä ja $|x| < \delta$, pätee tällöin $|x| < \frac{1}{2}\epsilon$ ja $|x^2| < \frac{1}{2}\epsilon$.

$\forall$: Lukija, muista myös, että kaikilla x pätee $|x + x^2| \leq |x| + |x^2|$.

5.10: Kun $\forall$ on sanonut luvun ϵ, sanoo $\exists$ lukuna δ luvun $\epsilon/5$.

$\exists$: Muista, että $|5x\sin(1/x)| \leq |5x|$, koska $|\sin(1/x)| \leq 1$.

6.1: $\forall$ sanoo lukuna ϵ luvun $1/2$, ja kun $\exists$ on sanonut luvun δ, sanoo $\forall$ lukuna x vaikkapa luvun $\delta/2$.

6.2: $\forall$ sanoo lukuna ϵ luvun $1/200000$, ja kun $\exists$ on sanonut luvun δ, sanoo $\forall$ lukuna x luvun $-\delta/2$.

$\forall$: Tässä pitää olla tarkkana, kun f saa nollasta eroavia arvoja pelkästään negatiivisella puolella.

6.3: $\forall$ sanoo lukuna ϵ luvun $1/2$, ja kun $\exists$ on sanonut luvun δ, sanoo $\forall$ luvun $\delta/2$, jos δ on irrationaalinen ja luvun $\delta/\sqrt{2}$, jos δ on rationaalinen.

$\forall$: Rationaaliluku jaettuna $\sqrt{2}$:lla on irrationaalinen, koska $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.

6.4: $\forall$ sanoo lukuna ϵ luvun $1/3$, ja kun $\exists$ on sanonut luvun δ, sanoo $\forall$ lukuna x pienemmän luvuista $1/300000$, $\delta/2$.

$\forall$: x:n valinnan kanssa pitää olla varovainen, ettei vahingossa sano arvoa x, jolla $f(x) = 0$. Sellaisia arvoja on kokonaista kolme kappaletta.

6.5: $\forall$ sanoo lukuna ϵ luvun $1/2$, ja kun $\exists$ on sanonut luvun δ, valitsee $\forall$ kokonaisluvun n, jolle $2\pi n > 1/\delta$, ja sanoo x:nä luvun $\frac{1}{2\pi n}$.

$\forall$: Pitää muistaa, että $\cos(\alpha) = 1$ aina, kun α on 2π:n monikerta.

7. $\forall$:illa on voittostrategia kohdassa 6.1. ($\epsilon = 1/2$). $\exists$:llä on voittostategia kohdissa 6.2 (δ mikä tahansa), 6.3 (δ rationaalinen), 6.4 ($\delta = 1/100000$) ja 6.5 ($\delta = 1/(\frac{1}{2}\pi)$.)

Esimerkki: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(0) = 0$, ja $f(x) = \frac{1}{x}$, jos $x \neq 0$. Nyt pelaajan $\exists$ tulee voittaakseen valita lukuna δ luku, joka on suurempi kuin $\frac{1}{\epsilon}$. Jos ϵ on pieni, on $\frac{1}{\epsilon}$ suuri.

$\forall$: Tuossa sinun kannattaa valita suuri δ.

$\exists$: Kuinkahan kävisi jatkuvuuspelissä, jos yrittäisin valita suuren δ:n?

$\forall$: Ei se auttaisi, koska minä voisin valita pienen positiivisen x:n, ja sitten $|f(x)| = \frac{1}{x}$ olisi suuri.

$\exists$: Jatkuvuuspelissä välillämme taitaa vallita kauhun tasapaino.

$\forall$: Sinä voit halutessasi valita pienen δ:n, ja pakottaa minut valitsemaan itseisarvoltaan pienen x:n.

$\exists$: Sinäkin voit aina halutessasi valita itseisarvoltaan pienen x:n, koska minä en pysty rajaamaan valintaasi muutoin kuin pakottamalla sinut valitsemaan itseisarvoltaan pienen x:n.

$\forall$: Jommalle kummalle on yleensä edullista saada jatkuvuuspelissä x:n itseisarvosta arvosta pieni, ja kumpi tahansa saa tässä suhteessa tahtonsa läpi. Niinpä x:n itseisarvo on jatkuvuuspelissä yleensä pieni.

$\exists$: Tämä taitaa olla juuri se ilmiö, johon Tuomas viittaa, kun hän sanoo, että jatkuvuuspelissä tarkastellaan funktion arvoja lähellä pistettä 0.

$\forall$: Tämän tehtävän [Tehtävä 7, Tuom. huom.] pelissä ei vastaavaa kauhun tasapainoa ole, koska sinä saat määrätä tarkastelupisteen aivan yksin.

8.1: $\exists$ voittaa millä strategialla tahansa.

8.2: $\forall$:lla on voittostrategia: $\exists$ on sanonut luvun δ. $\forall$ sanoo luvun ϵ, joka on pienempi kuin δ, ja luvun x, joka on lukujen δ ja ϵ välissä.

8.3: $\exists$:llä on voittostrategia. Hän sanoo lukuna δ luvun, joka on pienempi kuin 1.

8.4: $\exists$:llä on voittostrategia. Hän sanoo lukuna δ luvun, joka on pienempi kuin 1/10.

Yleinen luonnehdita: $\exists$:llä on voittostrategia, jos on olemassa $a > 0$, jolle $f(x) = 0$ aina, kun $|x| < a$. Muutoin $\forall$:lla on voittostrategia.

$\forall$: Pystyn voittamaan aina, jos on olemassa x, $|x| < \delta$, jolle $f(x) \neq 0$.

9: Pelaajalla $\exists$ on voittostrategiat kasautumispistepelissä kaikilla tehtävän 5 funktioilla, sekä tehtävien 6.1, 6.2, 6.3 ja 6.5 funktioilla. Esimerkin 1 funktiolla, tehtävän 6.4 funktiolla, sekä funktiolla $f(x) = \frac{1}{x}$ voittostrategia on pelaajalla $\forall$.

$\exists$: Onpa Tuomas lyhytsanainen.

$\forall$: Joo, lukijalle jää aika paljon duunia.

——-

$\forall$: Muistatko sen kauhun tasapaino -keskustelun, jonka kävimme tehtävän 7 ratkaisussa?

$\exists$: Tässäkin taitaa syntyä vastaava kauhun tasapaino. Kumpi tahansa saa halutessaan pakotettua x:n itseisarvon pieneksi.

$\forall$: Pelkkä x:n itseisarvon pieni koko ei vielä taida vielä määrätä pelin lopputulosta.

$\exists$: Vaikka x:n itseisarvo olisikin pieni, jää x:n tarkan arvon valintaan pelivaraa.

$\forall$: Kasautumispistepelissä sinä saat käyttää tuon pelivaran, ja jatkuvuuspelissä minä.

$\exists$: Siksi minä voitan kasautumispistepelin helpommin kuin jatkuvuuspelin.

10: Pelin säännöt: $\forall$ sanoo positiivisen reaaliluvun ϵ. $\exists$ sanoo positiivisen reaaliluvun δ. $\forall$ sanoo reaaliluvun x, jolle $|x - a| < \delta$. $\exists$ voittaa, jos $|f(x)| < \epsilon$. $\forall$ voittaa muutoin.

11: Pelin säännöt: $\forall$ sanoo positiivisen reaaliluvun ϵ. $\exists$ sanoo positiivisen reaaliluvun δ. $\forall$ sanoo reaaliluvun x, jolle $|x - a| < \delta$. $\exists$ voittaa, jos $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. $\forall$ voittaa muutoin.

12: Pelin säännöt: $\forall$ sanoo positiivisen reaaliluvun ϵ ja reaaliluvun a. $\exists$ sanoo luvun δ. $\forall$ sanoo reaaliluvun x, jolle $|x - a| < \delta$. $\exists$ voittaa, jos $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. $\forall$ voittaa muutoin.

$\forall$: Jes!, minä saan valita yhden arvon lisää.

$\exists$: Ominaisuus, jonka saisimme, jos $\forall$ valitsisi a:n vasta δ:n jälkeen, on nimeltään tasainen jatkuvuus. Esimerkiksi $f(x) = x$ on tasaisesti jatkuva, mutta $g(x) = x^2$ ei ole tasaisesti jatkuva.

13: Pelin säännöt: $\forall$ sanoo positiivisen reaaliluvun ϵ. $\exists$ sanoo positiivisen kokonaisluvun n_0. $\forall$ sanoo positiivisen kokonaisluvun n, jolle $n \geq n_0$. $\exists$ voittaa, jos $|x_n| < \epsilon$. $\forall$ voittaa muutoin.

11.8 Lähteet ja kiitokset

$\forall$: Olipa mielenkiintoinen teksti. Ei kai Tuomas ole voinut itse keksiä tätä kaikkea ihan itse.

$\exists$: Alla on listattu pari lähdettä.

1. Leea Virtanen, *Ujo piimä, koululaishuumoria*, sisältää muunmuassa analyysin niukka-pelistä.

2. J.H. Conway, *On Numbers and Games*, niukka-peli nimellä *My Dad Has More Money Than Yours*

3. Lauri Myrberg, *Differentiaali- ja integraalilaskenta I*, sisältää muunmuassa δ-ϵ-määritelmän jatkuvuudelle.

$\forall$: Miksi tämä kirja on listattu? Eihän tätä käytetä enää.

$\exists$: Tuomas on opiskellut jatkuvuuden peruskäsitteet täältä.

$\forall$: Tuomaksella taitaa olla joku fiksaatio tähän kirjaan.

4. Cauchy, Weierstrass ja kumppanit, jatkuvuuden määritelmän kehittäminen.

$\forall$: Miksi tässä ei ole listattu kirjojen nimiä?

$\exists$: Ei ole Tuomas tainnut lukea näiden kirjoittamia kirjoja alkuperäisteoksina.

∀: Mutta ne ovat pari sataa vuotta vanhoja, joten voimme kai antaa anteeksi.

5. Donald Knuth, *Surreal Numbers*, matematiikan esittäminen dialogityylillä.

6. Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen ja Maija Salmela, *Differentiaalilaskenta 1, Pitkä Matematiikka*, 1.-6. painos, WSOY 2002. Sisältää yhden sivun pituisen jatkuvuuspelin käsittelyn.

Kiitän Saara Lehtoa ja Antti Rasilaa rohkaisusta ja palautteesta tämän tekstin kanssa, sekä Juha Oikkosta, joka on tuonut pedagogisen otteen Helsingin Yliopiston differentiaali- ja integraalilaskennan alkeisopetukseen. Olen unohtanut, mistä opin kvantifikaation käsittelemisen pelien avulla, mutta kiitän joka tapauksessa kyseistä tuntematonta lähdettä. Kiitän myös ∃:tä, sekä erityisesti ∀:ta, joka jaksoi urheasti pelailla tämän kirjoitelman loppuun saakka huonosta voittoprosentista huolimatta.